Уральский
федеральный
университет
имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина
Высшая школа
экономики
и менеджмента

С. А. АНИКИН
М. А. МЕДВЕДЕВА
О. И. НИКОНОВ

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Учебное пособие

Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

С. А. Аникин
О. И. Никонов
М. А. Медведева

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Рекомендовано методическим советом УрФУ
*в качестве **учебного пособия** для студентов,*
обучающихся по программе магистратуры по направлениям
подготовки 080500, 230700, 080100, 080200, 010300

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2014

УДК 330.4(075.8)
ББК 65в631
А67

Рецензенты:
д-р физ.-мат. наук, проф. Г. А. Тимофеева (завкафедрой «Высшая и прикладная математика» УрГУПС);
д-р физ.-мат. наук, проф. В. И. Максимов (Ин-т математики и механики УрО РАН)

Научный редактор д-р физ.-мат. наук Х. Н. Астафьев

Аникин, С. А.
А67 Математика для экономистов: учебное пособие / С. А. Аникин, О. И. Никонов, М. А. Медведева. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2014. – 72 с.
ISBN 978-5-7996-1108-8

В пособии рассматриваются математические модели в финансах и страховании. Первые две главы посвящены изложению классических подходов к моделированию ситуаций и процессов в названных областях, в третьей главе приводится вводное описание подхода, характерного для современной математической и экономико-математической литературы.

Рекомендовано для студентов, обучающихся по направлениям 080500 «Бизнес-информатика», 230700 «Прикладная информатика», 080100 «Экономика», 080200 «Менеджмент», 010300 «Фундаментальная информатика и информационные технологии».

Библиогр.: 29 назв. Табл. 3. Рис. 20.

УДК 330.4(075.8)
ББК 65в631

ISBN 978-5-7996-1108-8

ПРЕДИСЛОВИЕ

В пособии рассматриваются вопросы, связанные с математическим моделированием финансовых и страховых инструментов. В первой главе приводятся классические результаты, восходящие к работе Г. Марковица, относящиеся к теории портфельных инвестиций. Дается математическая постановка задачи и ее решение как собственно для задачи Г. Маковица, так и для ее модификации, принадлежащей Дж. Тобину. На примерах иллюстрируется важная роль ковариаций в описываемых построениях. Также первая глава посвящена модели ценообразования на рынке капитала (CAPM), параметрам α и β ценной бумаги, обобщениям модели CAPM.

Вторая глава работы посвящена математическим моделям в страховании. Здесь вводятся основные понятия, связанные с моделированием: функция выживания, кривая смертей, интенсивность смертности. Далее рассматриваются аналитические законы смертности: модели де Муавра, Вейбула, Мэйкхама и Гомперца. Приведен анализ моделей краткосрочного и долгосрочного страхования.

В третьей главе рассматриваются вопросы, относящиеся к введению в современный стохастический анализ. В отличие от первых двух глав, в которых рассматриваются классические подходы к построению стохастических моделей, в данной главе вводятся понятия, характерные для современных подходов к стохастическому моделированию. Определяется стохастический базис, поток σ-алгебр, фильтрация и стохастический процесс, согласованный с фильтрацией. Намечаются подходы к моделированию финансовых рынков, основанные на развиваемой теории.

Цель – представить в доступной для обучающихся форме основные понятия и положения теории портфельных инвестиций, модели ценообразования на рынке капитала, а также основные понятия страховой математики и стохастического финансового анализа.

1. ФИНАНСОВЫЙ АНАЛИЗ В УСЛОВИЯХ РИСКА И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

1.1. Теория Марковица–Тобина–Шарпа

В процессе составления портфеля финансовых активов или портфеля мероприятий, направленных на получение финансовой прибыли, (проекты, заказы, инвестиции) обычно преследуется цель – получить максимальный доход при минимальном риске. Однако стремление получить высокий доход обычно сопряжено с высоким риском. Теория портфеля позволяет находить рациональные компромиссы между ожидаемым доходом и риском финансовых операций.

Начало формирования теории портфеля связывают с работой Г. Марковича, впоследствии награжденного Нобелевской премией за свои результаты в этой области. Названная теория была развита для портфелей ценных бумаг, поскольку вложения в ценные бумаги можно теоретически рассматривать как бесконечно делимые, что упрощает построения, а богатая статистика позволяет достаточно точно аппроксимировать вероятностные характеристики этих финансовых инструментов.

Пусть рассматривается набор из N видов ценных бумаг, причем доходность (норма дохода) ценной бумаги i-го вида описывается *случайной величиной* r_i. Портфель мы ассоциируем с N-мерным вектором y, каждая компонента которого $y_i \geq 0$ соответствует доле содержания ценных бумаг i-го вида (в их денежном выражении) в портфеле: $\sum_{i=1}^{N} y_i = 1$. Ожидаемая (средняя) доходность портфеля находится по формуле

$$M_p = \sum_{i=1}^{N} y_i x_i, \tag{1.1}$$

где x_i – математическое ожидание (ожидаемое значение) доходности бумаги i-го вида, $x_i = M(r_i)$. Как правило, доходность измеряется в долях единицы или в процентах (числу 0,1 соответствует 10 %, 0,25 – 25 % и т. д.).

Ожидаемый разброс, отклонение доходности портфеля от среднего значения находится как среднеквадратичное отклонение

$$\sigma_p^2 = M\left(\sum_{i=1}^{N} y_i r_i - M_p\right)^2.$$

Можно указать другое выражение для вычисления σ_p^2:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} y_i y_j \sigma(r_i)\sigma(r_j)\mathrm{cor}(r_i, r_j), \tag{1.2}$$

где символ σ_p^2 означает дисперсию; символ $\mathrm{cor}(r_i, r_j)$ – коэффициент корреляции между величинами r_i и r_j. Если портфель состоит из некоррелированных между собой ценных бумаг, то для разброса доходности портфеля справедлива следующая формула: $\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i^2 \sigma_i^2(r_i)$.

Среднеквадратичное, или стандартное, отклонение σ_p – показывает меру отклонения доходности портфеля от ее среднего значения. Эта величина σ_p, называемая иногда *степенью неопределенности*, и трактуется в рамках излагаемого подхода как *риск портфеля*, она измеряется в тех же единицах, что и доходность.

Стоимость (полезность) некоторого финансового результата, который характеризуется случайной величиной, может быть оценена как ее среднее значение, скорректированное с учетом премии за риск. В связи с этим стоимость портфеля можно оценить с помощью параметров M_p и σ_p. Эти параметры являются ключевыми в теории портфеля.

Приведем пример расчета ожидаемой доходности и риска портфеля, состоящего из двух видов ценных бумаг. Предположим, что ожидаемые доходности x_A акций *A* и x_B акций *B* равны 20 и 40 % соответственно; σ_A = 10 %, σ_B = 50 %. Рассмотрим портфель, состоящий из $y \cdot 100$ % акций *B* и $(1-y) \cdot 100$ % акций *A*. Интерес представляет взаимосвязь доходности портфеля и риска при разных долях акций *A* и *B*, в частности, возможность минимизации риска путем рационального формирования портфеля. Результаты расчетов приведены в табл. 1.1 и на рис. 1.1. В каждой строке таблицы показаны значения риска портфеля σ_p, соответствующие корреляции и доходности.

Ожидаемая доходность портфеля рассчитана по формуле (1.1)

$$\mu = M_p(y) = yM_B + (1-y)M_A = y \cdot 40 + (1-y) \cdot 20.$$

Риск портфеля σ_p найден в соответствии с равенством (1.2)

$$\sigma_p = \sqrt{y^2\sigma_A^2 = (1-y)^2\sigma_B^2 + 2y(1-y)\sigma_A\sigma_B\mathrm{cor}(r_A, r_B)},$$

где $\mathrm{cor}(r_A, r_B)$ – корреляция доходностей акций *A* и *B*,

$$\mathrm{cor}(r_A, r_B) = \frac{\mathrm{cov}(r_A, r_B)}{\sigma_A\sigma_B};$$

$$\mathrm{cor}(r_A, r_B) = M[(r_A - x_A)(r_B - x_B)].$$

Таблица 1.1

Стандартные отклонения доходности портфеля ($)

$\mathrm{cor}(A,B)$	Доля акций B, % (y)											
	0	10	17	20	30	40	50	60	70	80	90	100
	Доходность портфеля $\left(M_p(y)\right)$											
	20	22	23,40	24	26	28	30	32	34	36	38	40
–1	10	4	0,20	2	8	14	20	26	32	38	44	50
–0,8	10	5,83	5,32	6	10,30	15,62	21,21	26,91	32,65	38,42	44,20	50
–0,6	10	7,21	7,52	8,25	12,17	17,09	22,36	27,78	33,29	38,83	44,41	50
–0,4	10	8,37	9,20	10	13,78	18,44	23,45	28,64	33,91	39,24	44,61	50
–0,2	10	9,38	10,63	11,49	15,23	19,70	24,49	29,46	34,53	39,65	44,81	50
0	10	10,30	11,88	12,81	16,55	20,88	25,50	30,24	35,13	40,05	45,01	50
0,2	10	14,14	13,01	14	17,78	22	26,46	31,05	35,72	40,45	45,21	50
0,4	10	11,92	14,06	15,10	18,92	23,07	27,39	31,81	36,30	40,84	45,41	50
0,6	10	12,65	15,03	16,12	20	24,08	28,28	32,56	36,88	41,23	45,61	50
0,8	10	13,34	15,94	17,09	21,02	25,06	29,15	33,29	37,44	41,62	45,80	50
1	10	14	16,80	18	22	26	30	34	38	42	46	50

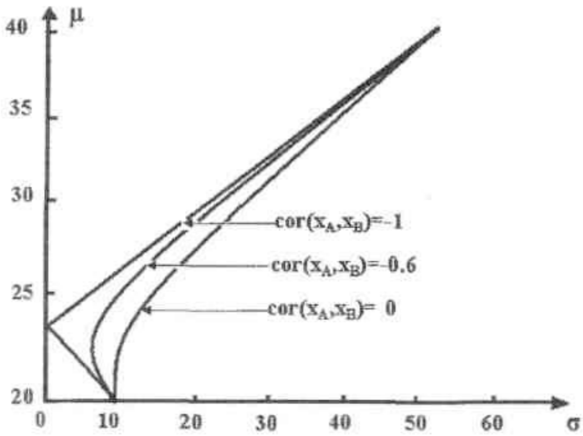

Рис. 1.1. Доходность портфеля
в зависимости от риска и корреляции

Для оценки степени неопределенности дохода рассмотрим следующие варианты:

- вложение денег в безрисковые активы (облигации, банковский счет), имеющие доходность r_0;
- вложение денег в портфель из рисковых активов (например, акций), имеющий ожидаемую доходность x_p;
- вложение денег в портфель, содержащий одновременно и безрисковые активы и рисковые.

Первая возможность является простой и в контексте проводимых построений не заслуживает отдельного анализа. В финансовой математике обычно предполагается, что существует возможность хранить деньги на банковском счете или в виде государственных ценных бумаг, причем доходность таких вложений задана и одна и та же для всех участников. Детальное рассмотрение вопросов, связанных с анализом ставок по кредитам и депозитам, а также доходности облигаций, выходит за рамки настоящего пособия.

При второй возможности исследуются портфели, имеющие минимальное значение риска σ_p при заданной доходности $x_p = \mu$. Такие портфели p^* определяются равенством $\sigma_{p^*}(\mu) = \min\{\sigma_p \mid x_p = \mu\}$, где минимум вычисляется по всем допустимым портфелям p. Для упрощения обозначений положим $\sigma^*(\mu) = \sigma_{p^*}(\mu)$.

В случае когда дополнительных ограничений на допустимые портфели нет, задача нахождения зависимости $\sigma = \sigma^*(\mu)$ имеет явное решение. Ее можно сформулировать в форме задачи математического программирования:

найти

$$\min_y \sqrt{y^T V y} \tag{1.3}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{N} y_i = 1, \tag{1.4}$$

$$\sum_{i=1}^{N} y_i x_i = \mu. \tag{1.5}$$

В формуле (1.3) V – матрица ковариаций, ее элементы $\sigma_{ij} = \mathrm{cov}(r_i, r_j)$ ковариации случайных величин r_i и r_j $(i, j = 1, 2, ..., N)$; символ T означает операцию транспонирования вектора.

При некоторых дополнительных технических ограничениях задача (1.3)–(1.5) имеет решение $y_* = \varphi\mu + \psi$; $\sigma^*(\mu) = = \sqrt{y_*^T V_*^T} = \sqrt{a\mu^2 + b\mu + c}$, где φ и ψ – фиксированные векторы, определяемые по параметрам задачи и не зависящие от μ; $a > 0$; $b^2 - 4ac < 0$.

График функции $\sigma^*(\mu)$ (рис. 1.2) представляет собой гиперболу. Верхняя ветвь гиперболы соответствует так называемым *эффективным*, или *недоминируемым*, портфелям. Каждый такой портфель характеризуется тем, что у любого портфеля с иными характеристиками риска и доходности либо доходность меньше, либо риск больше (либо то и другое одновременно).

Третья возможность составления портфеля и оценки риска – портфель из акций и безрисковых активов. Этот вариант постановки задачи был рассмотрен Дж. Тобином. Здесь портфель ассоциируется уже с (N + 1)-мерным вектором $\hat{y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y \end{pmatrix}$, первая компо-нента которого – доля капитала, вкладываемого по ставке r_0 без риска. Ожидаемая доходность такого портфеля имеет вид

$$x_p = y_0 r_0 + \sum_{i=1}^{N} y_i x_i, \tag{1.6}$$

а выражение для риска формально остается тем же самым

$$\sigma_{\hat{y}} = \sqrt{y^T V_y}.$$

Задача на отыскание портфеля с минимальным риском $\sigma^*(\mu)$ при фиксированной ожидаемой доходности μ формулируется совершенно аналогично задаче (1.3)–(1.5) с необходимой модификацией в соответствии с новым выражением для доходности (1.6).

Введение новой переменной y_0 только упрощает решение задачи, и мы можем привести ответ полностью.

Зависимость $\sigma = \sigma^*(\mu)$ минимально возможного риска от доходности μ здесь имеет простой вид

$$\sigma = \frac{\mu - r_0}{g}, \tag{1.7}$$

где $g = \sqrt{(x - r_0 e)^T V^{-1} (x - r_0 e)}$. Здесь x – вектор, составленный из доходностей рисковых активов; e – вектор, у которого все компоненты равны 1.

Эффективные портфели определяются равенствами

$$y^* = \frac{\mu - r_0}{g^2} V^{-1}(x - r_0 e), \quad y_0^* = 1 - y^T e. \tag{1.8}$$

Таким образом, зависимость риска и доходности для эффективных портфелей линейная, а сами портфели обладают важным свойством: структура рисковой части y^* для всех таких портфелей одна и та же. Различие определяется лишь скалярным множителем $(\mu - r_0)$, который и характеризует склонность инвестора к риску: большим значениям μ соответствует и большая доходность и большой риск одновременно. Геометрически эффективным портфелям на плоскости (σ, μ) соответствует прямая линия (рис. 1.2).

Можно показать также, что один из эффективных портфелей в задаче Тобина является таковым и для задачи Марковица. Это портфель, содержащий нулевую безрисковую часть. Таким образом, прямая, соответствующая решениям задачи Тобина, является касательной к гиперболе, соответствующей эффективным портфелям чисто рисковых активов.

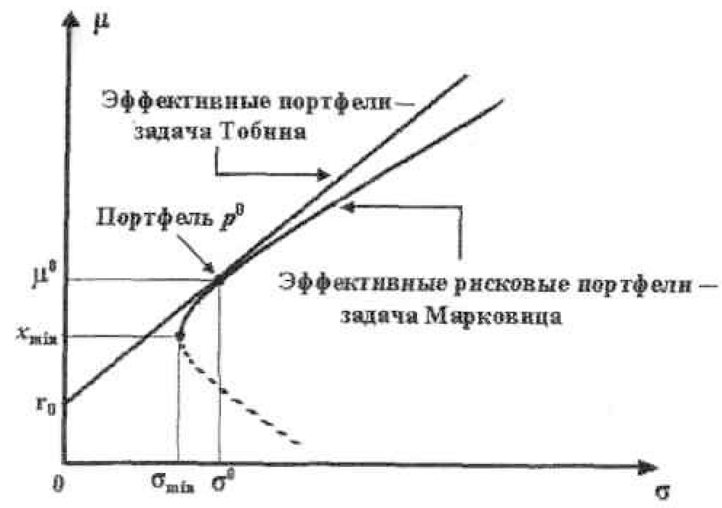

Рис. 1.2. Эффективные портфели рисковых активов

Разность $(x_p - r_0)$ между доходностью x_p рискового портфеля и доходностью безрисковых ценных бумаг r_0 называется *дополнительной доходностью*, или *премией за риск*. Эту величину можно использовать как для портфелей, составленных только для рисковых активов, так и для портфелей с безрисковой частью.

Рассмотрим отношение премии за риск $(x_p - r_0)$ портфеля к степени неопределенности σ_p

$$\gamma_p = \frac{x_p - r_0}{\sigma_p}.$$

Данную величину называют *удельной премией за риск*, или коэффициентом Шарпа для данного портфеля. Можно показать, что портфель p^0 с максимальным коэффициентом Шарпа – это один из эффективных портфелей в задаче Марковица. Он находится как решение следующей задачи.

Найти

$$\gamma^0 = \max\{\gamma_p \mid p\},$$

где максимум вычисляется по всевозможным портфелям *p*.

Обозначим через σ^0 и μ^0 значения риска и доходности портфеля p^0. В таком случае

$$\gamma^0 = \frac{\mu^0 - r^0}{\sigma^0} \tag{1.9}$$

и

$$\mu^0 = r_0 + \gamma^0\sigma^0.$$

Портфель из рисковых активов с максимальным коэффициентом Шарпа иногда называют *оптимальным.* Оптимальность портфеля здесь состоит в том, что риск компенсируется по максимально возможной ставке доходности.

Свойство оптимальности можно также пояснить следующим образом. Рассмотрим портфель, в котором долю y составляют безрисковые ценные бумаги с гарантированной доходностью r_0, а доля $(1 - y)$ вложена в оптимальный портфель рисковых активов p^0. Ожидаемая доходность нового портфеля будет равна $x_p = yr_0 + (1-y)\mu^0$, а степень неопределенности (риск)

$$\sigma_p = (1-y)\sigma^0. \tag{1.10}$$

Для нового портфеля отношение дополнительной доходности к степени неопределенности определится равенством

$$\gamma_p = \frac{yr_0 + (1-y)\mu^0 - r_0}{(1-y)\sigma^0} = \frac{(1-y)\mu^0 - (1-y)r_0}{(1-y)\sigma^0} \text{ или } \gamma_p = \frac{\mu^0 - r_0}{\sigma^0} = \gamma^0.$$

Таким образом, оптимальное отношение дополнительной доходности к неопределенности является постоянным и не зависит от степени неопределенности. Последнее равенство отражает тот факт, что эффективным портфелям, содержащим рисковую и безрисковую часть (решения задачи Тобина), на плоскости риск–доходность соответствует прямая. Тангенс угла наклона этой прямой к оси σ, равный γ^0, свидетельствует о том, что данная прямая является касательной к кривой, отвечающей эффективным чисто рисковым портфелям, а оптимальный портфель – это тот самый портфель, который является эффективным одновременно и для задачи Марковица, и для задачи Тобина. Заметим, что отрицательным y соответствует взятие денег в кредит под процент r_0 и приобретение на эти деньги бумаг рискового портфеля.

Конкретизируем ситуацию, придав параметрам числовые значения. Пусть имеются безрисковые облигации с доходностью 10 %; акции *A* и *B*, имеющие доходности x_A = 15 % и x_B = 30 % и риски $\sigma_A = 10$ %, $\sigma_B = 40$ % соответственно. Для коэффициента корреляции положим cor(r_A, r_B) = –0,6.

Найдем оптимальный портфель из акций *A* и *B* и удельную премию за риск γ^0. Акции *A* и *B* имеют отрицательный коэффициент корреляции. Кроме того, доходность акций *B* больше, чем доходность акций *A*. Будем начиная с портфеля, состоящего из 100 % акций *A*, постепенно увеличивать долю акций *B*. Результаты вычислений параметров портфеля приведены в табл. 1.2. Можно заметить, что доходность портфеля при этом увеличивается, а риск до определенного момента уменьшается. Последнее обстоятельство обусловлено отрицательной корреляцией доходностей активов.

Однако, ввиду большого риска и высокой доходности акций *B* по сравнению с акциями *A*, рост доходности портфеля начиная с некоторой точки будет происходить за счет риска. По этим причинам кривая, отражающая связь доходности и риска портфеля, имеет загиб (рис. 1.3) в сторону оси ординат, соединяя точки $A(\sigma_A, x_A)$ и $B(\sigma_B, x_B)$. Данное обстоятельство, впрочем, вполне согласуется с общей теорией. Построенная кривая является частью гиперболы, портфелю из акций *A* отвечает точка на ее нижней ветви, а портфелю из акций *B* – на верхней.

Таблица 1.2

Величины доходности и риска портфеля из акций *A* и *B*, %

Показа-тель	Доля акций *B* в портфеле, %										
	0	10	17	20	25	30	40	50	60	70	80	100
Риск σ_p	10	7,33	6,88	7,16	8,14	9,60	13,30	17,46	21,54	26,31	20,84	40
Доход-ность x_p	15	16,50	17,55	18	18,75	19,50	21	22,50	24	25,50	27	30

Точка $(\sigma^0,\ \mu^0)$, максимизирующая $\frac{x_p - r_0}{\sigma_p}$, дает риск и доходность оптимального портфеля из акций *A* и *B*. Среди значений в табл. 1.2 выбираем оптимальные риск и доходность портфеля. Они равны соответственно 6,88; 17,55 %. Оптимальный портфель состоит из 17 % акций *A* и 83 % акций *B* (рис. 1.3). Решение получено прос-тым перебором и является приближенным, поэтому целесообразно округлить 6,88 до 7 %, а 17,55 до 18 %.

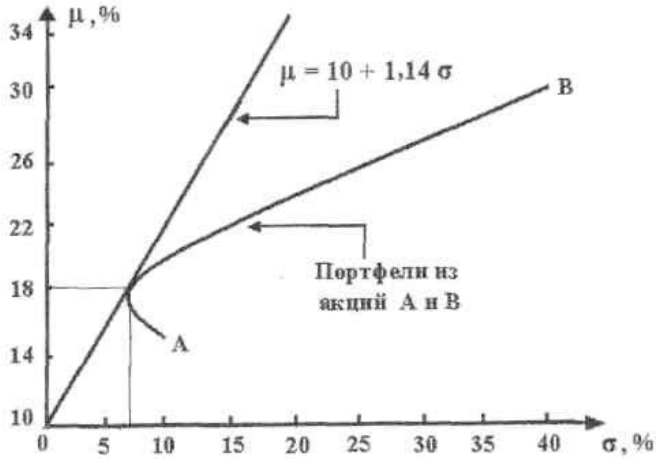

Рис. 1.3. Эффективные портфели двух рисковых активов

Риск портфеля, %, рассчитывается по формуле (1.2):

$$\sigma_p = \sqrt{(1-y)^2\sigma_A^2 + y^2\sigma_B^2 + 2y(1-y)\sigma_A\sigma_B \mathrm{cor}(r_A, r_B)};$$

$$\sigma_p = \sqrt{(1-y)^2 \cdot 0{,}16 + y^2 \cdot 0{,}01 + 2y(1-y)\cdot(-0{,}024)}.$$

Ожидаемая доходность портфеля, %, находится по формуле (1.1):

$$x_p = (1-y)x_A + yx_B = (1-y)\cdot 15\ \% + y\cdot 30\ \%.$$

Нетрудно сосчитать и удельную премию за риск оптимального портфеля:

$$\gamma^0 = \frac{18-10}{7} = 1{,}14.$$

Сформируем оптимальный портфель из акций и безрисковых облигаций, имеющий заданную доходность μ. Облигации дают безрисковый доход по ставке r_0. Доля облигаций y в новом портфеле вычисляется на основе формулы $\mu = yr_0 + (1-y)\mu^0$, где μ^0 и σ^0 – доходность и риск оптимального портфеля из акций A и B. Выделяя из этой формулы долю безрисковых облигаций y, получаем

$$y = \frac{\mu^0 - \mu}{\mu^0 - r_0}, \tag{1.11}$$

где μ – заданная доходность нового оптимального портфеля из акций и облигаций. Риск σ оптимального портфеля с доходностью μ определяется по формулое (1.10). Если желаемая доходность μ больше, чем доходность оптимального рискового портфеля μ^0, то доля y, определяемая по формуле (1.11), становится отрицательной.

Сделаем небольшое отступление, касающееся допущения о том, что доли как рисковых, так и безрисковых активов могут принимать отрицательные значения. Отрицательные доли соответствуют так называемой *короткой позиции* по активам с такими долями.

Фактическое владение инвестором ценными бумагами называется *длинной позицией* (*long position*) по этим бумагам. Например, по фактически купленным акциям инвестор занимает длинную позицию (или сами бумаги находятся в длинной позиции). Контракт, по которому ценная бумага продана и принято обязательство предоставить ее в будущем к определенной дате по заранее оговоренной цене, называется *короткой позицией* (*short position*). При этом в момент заключения сделки можно не иметь продаваемой бумаги.

Поясним смысл короткой позиции. Предположим, ожидается падение акций D, но у инвестора их нет. В этом случае можно заключить контракт о продаже определенного количества этих акций через определенное время по текущей цене $S_{0,D}$. Тем самым инвестор займет короткую позицию по акциям D. Если прогнозы оправдаются и стоимость акций снизится до $S_{1,D} < S_{0,D}$, то акции покупают по фактической цене $S_{1,D}$ и продают по оговоренной в контракте цене $S_{0,D}$. Разница составляет доход от сделки.

Если доля y в формуле (1.11) отрицательна, облигации находятся в портфеле в короткой позиции: инвестор принял обязательство их продать в будущем, не имея их на руках, или же они заняты под безрисковый процент. На вырученные от продажи деньги увеличивается объем оптимального портфеля из акций *A* и *B*. В новом оптимальном портфеле p^0 на $-y$ долей облигаций в короткой позиции приходится $(1 - y)$ долей бумаг портфеля p^0.

Проиллюстрируем сказанное на примере. Рассмотрим процедуру формирования эффективных портфелей, дающих 12 и 30 % дохода, на основе исходных данных предыдущего примера. Согласно этому примеру, $\mu^0 = 17{,}55$ %, $\sigma^0 = 6{,}88$ %. Сформируем новый оптимальный портфель, содержащий безрисковую часть и имеющий доходность 12 %. По формуле (1.11) этот портфель содержит, %, $\frac{12}{18} = 66{,}66$. Следовательно, на ценные бумаги портфеля p^0 остается, %, 100 – – 66,66 = 33,34. Эти соотношения определяют состав нового оптимального портфеля: 66,66 % облигаций, $\frac{18-12}{18} \cdot 17 = 5{,}67$ % акций *B* и $\frac{18-12}{18} \cdot (100-17) = 27{,}67$ % акций *A*. Новый эффективный портфель p^*_{new} имеет риск, рассчитываемый по формуле (1.10) и равный $7 \cdot (1 - 0{,}67) = 2{,}31$ %.

Теперь перейдем к другому эффективному портфелю p^{**}_{new}, у которого доходность 30 %. Согласно формуле (1.11) на каждые $\frac{30-18}{18} = 0{,}67$ частей *обязательств по облигациям* приходятся 1 + 0,67 = = 1,67 частей ценных бумаг портфеля p^0. Эти соотношения определяют состав нового портфеля: на каждые 0,67 частей обязательств по облигациям приходятся $(1+0{,}67) \cdot 0{,}17 = 0{,}28$ частей акций *B*, $(1 + 0{,}67) \cdot 0{,}83 = 1{,}39$ частей акций *A*. Иначе говоря, на каждые 67 дол. обязательств по облигациям портфель имеет 28 дол. в акциях *B* и 139 дол. в акциях *A*. Риск нового портфеля p^{**}_{new} рассчитывается по формуле (1.10) с $y = -0{,}67$: $7 \cdot (1+0{,}67) = 11{,}69$ %.

Доходность любого эффективного портфеля, составленного как из рисковых, так и безрисковых активов, определяется равенством

$$x_p = r_0 + \gamma^0 \sigma_p, \tag{1.12}$$

где r_0 – безрисковая процентная ставка; γ^0 – удельная премия за риск оптимального портфеля p^0; σ_p – степень неопределенности, или риск портфеля.

Удельную премию за риск часто называют индексом портфеля.

Эта величина характеризует портфель и может рассматриваться как аналог широко известных индексов, таких как индексы Доу Джонса, индекс *S&P*500, российский индекс РТС и др.

1.2. Модель ценообразования на рынке капитала CAPM

С конца шестидесятых годов прошлого века популярной становится инвестиционная теория, связанная с моделью оценки капитальных активов. Ее основы были заложены в работах У. Шарпа, Дж. Липтнера, Дж. Моссина. Модель ценообразования на рынке капитала CAPM (Capital Assets Pricing Model) – модель, в основе которой лежат обсуждавшиеся выше соотношения, относящиеся к выбору оптимального или эффективного портфеля.

Модель формулируется для *идеального конкурентного рынка,* обладающего следующими основными свойствами:

- все участники рынка обладают полной и одинаковой информацией о доходностях доступных активов;
- все активы абсолютно ликвидны, инвесторы имеют возможность купить и продать, занять и дать в долг любое количество активов, при этом для безрисковых активов действует единая процентная ставка r_0;
- все инвесторы формируют свои портфели в соответствии с теорией Марковица–Тобина, т. е. выбирают эффективные портфели из рисковых и безрисковых активов.

Среди перечисленных свойств идеального конкурентного рынка последнее условие выглядит самым ограничивающим, из-за него модель CAPM не без основания подвергалась серьезной критике. Однако основные выводы, получаемые на основе этой модели, находят практическое применение и подтверждаются статистически.

В условиях идеального конкурентного рынка все инвесторы имеют одну и ту же структуру рисковой части портфеля, которая совпадает со структурой оптимального чисто рискового портфеля p^0. Отсюда при помощи логического рассуждения выводится, что сам портфель p^0 не может быть ничем иным, как реально существующим рыночным портфелем, т. е. его доли – это доли всего обращающегося на рынке капитала, которые соответствуют суммарной стоимости акций определенного вида.

Последнее обстоятельство позволяет оценить характеристики риска и доходности портфеля p^0 без решения оптимизационной задачи, используя те или иные рыночные индексы. В качестве такого индекса берут, например, индекс *S&P*500. Он содержит аккумулированную информацию об акциях пятиста крупнейших компаний и в значительной степени отражает поведение финансового рынка в целом.

Таким образом, оптимальный портфель p^0 для всех инвесторов один и тот же. В силу того что это – рыночный портфель, примем для него специальное обозначение – символ m, а характеристики его риска и доходности обозначим через σ_m и x_m соответственно.

Линия рынка капитала *Capital Market Line* – это прямая на плоскости (σ, μ), связывающая уровень риска σ с доходностью μ для эффективных портфелей в задаче Тобина. В нашем случае это – рыночный портфель и те портфели, у которых структура рисковой части совпадает со структурой рыночного портфеля. Уравнение линии рынка капитала с учетом принятых обозначений получается путем преобразования формулы (1.7) с использованием соотношений (1.8) и (1.9): $\mu = r_0 + \frac{x_m - r_0}{\sigma_m}\sigma.$ (1.13)

Связь ожидаемой доходности отдельной бумаги с параметрами рыночного портфеля в равновесном состоянии рынка дает равенство

$$x_j = r_0 + \frac{x_m - r_0}{\sigma_m^2}\operatorname{cov}(r_j, r_m), \qquad (1.14)$$

где $\operatorname{cov}(r_j, r_m)$ – коэффициент ковариации (линейной связи) доходностей рыночного портфеля и бумаги; r_j – случайная доходность ценной бумаги; r_m – случайная доходность рыночного портфеля.

Равенство (1.14) можно вывести путем преобразования выражения $\operatorname{cov}(r_j, r_m)$ с учетом явного представления доходности r_m по формуле (1.8).

Введем коэффициент λ – отношение премии за риск (дополнительной доходности рыночного портфеля по сравнению с доходностью безрисковых вложений) к его риску: $\lambda = \frac{x_m - r_0}{\sigma_m^2}.$ С учетом этого обозначения равенство (1.14) запишем в виде

$$x_j = r_0 + \lambda \operatorname{cov}(r_j, r_m). \qquad (1.15)$$

Если теперь на горизонтальной оси отложить точки $\operatorname{cov}(r_j, r_m)$, отвечающие различным бумагам, то на плоскости $(\operatorname{cov}(r_j, r_m), x_j)$ соответствующие точки будут располагаться на одной прямой. Эта прямая называется *линией бумаг*, или *Security Market Line*. Уравнение (1.14) и соответствующий ему график отражают взаимосвязь доходности отдельной бумаги с доходностью рынка в целом.

Однако чаще используется другой способ представления указанной взаимосвязи. Для того чтобы его получить, перепишем равенство (1.14) в следующем виде: $x_j = r_0 + (x_m - r_0)\dfrac{\operatorname{cov}(r_j, r_m)}{\sigma_m^2}$. Коэффициент $\dfrac{\operatorname{cov}(r_j, r_m)}{\sigma_m^2}$ является характеристикой ценной бумаги и обозначается символом β: $\beta_j = \dfrac{\operatorname{cov}(r_j, r_m)}{\sigma_m^2}$. Равенство (1.14) принимает вид

$$x_j = r_0 + (x_m - r)\beta_j. \tag{1.16}$$

Соотношение (1.16) называется *основным уравнением модели CAPM* (см. рис. 1.4).

Коэффициент бета β связывает доходность ценной бумаги с доходностью рынка. Для рыночного портфеля $\beta_m = 1$, поэтому уравнение (1.16) преобразуется в тождество $x_m = x_m$. Параметр β показывает, на сколько изменения доходности отдельной бумаги следуют за изменениями доходности рынка. Этот параметр известен не только специалистам-теоретикам, но и широкому кругу практиков, работающих на финансовом рынке. Статистические оценки бета для большинства ценных бумаг регулярно публикуются в финансовой прессе, существует даже специальное издание *Beta Book*, выпускаемое одним из ведущих финансовых издательств.

Есть и специальная терминология, относящаяся к β-характеристике риска ценной бумаги. Бумаги с бета, близкими к единице, называются нейтральными (*neutral*). Изменения их доходностей следуют за движениями рынка, соответственно риск, связанный с ними, близок к риску работы на всем рынке.

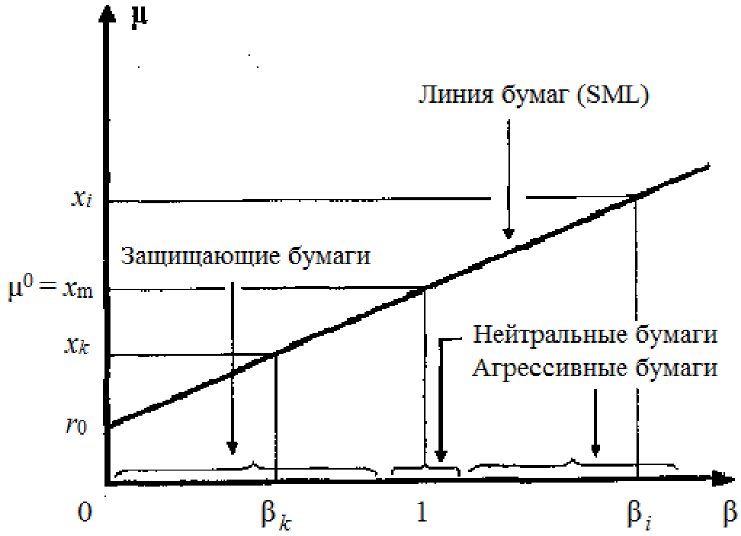

Рис. 1.4. Линия бумаг и β-характеристика ценной бумаги

Бумаги с большими бета называются агрессивными (*aggressive*), при вложении средств в такие бумаги инвестор получает больший выигрыш по сравнению с рыночным, если рынок растет, однако и больший проигрыш, если рынок падает. Соответственно риск при работе с такими бумагами больше.

И наконец, при малых положительных бета бумаги называются безопасными и даже защищающими (*defensive*). Их корреляция с рынком весьма мала, они полезны в случае ожидаемого падения рынка.

Систематический и несистематический риск. При формировании портфеля инвесторы стремятся достичь максимальной доходности при минимальном риске (неопределенности). Возникает вопрос: на сколько риск ценной бумаги может быть уменьшен за счет ее включения в подходящий портфель? Различают систематический и несистематический риски. *Систематический риск* (*systematic risk*) – это риск, не поддающийся диверсификации, присущий всем ценным бумагам данного вида, например, акциям, облигациям. *Несистематический риск* (*nonsystematic risk*) – риск, который может быть диверсифицирован путем включения бумаги в портфель с другими ценными бумагами того же вида. *Диверсификация* (*diversification*) – уменьшение риска путем составления портфеля и перераспределения риска.

Ответ на вопрос о количественных оценках систематического и несистематического риска дает модель CAPM и формулы (1.13), (1.15), (1.16), связывающие степень неопределенности оптимального портфеля с уровнем его доходности. В общем виде формула для определения минимально возможного систематического риска – систематической неопределенности – такова: $\sigma_j^s = \beta_j \sigma_m$, где σ_m – неопределенность оптимального рыночного портфеля с доходностью x_m. Несистематический, т. е. диверсифицируемый, риск может быть найден из соотношения $\sigma_j^{ns} = \sigma_j - \beta_j \sigma_m$.

С помощью составления оптимального портфеля можно свести риск к $\beta_j \sigma_m$. Дальнейшее уменьшение риска достигается только при уменьшении уровня доходности портфеля. Геометрически несистематическому риску соответствует расстояние от точки бумаги на плоскости риск–доходность до прямой *CML* по горизонтали, а систематическому – далее от *CML* до оси ординат (см. рис. 1.5).

Проиллюстрируем сказанное на примере. Пусть σ_m = 30 %, x_m = 44 %, r_0 = 8 %, β_j = 0,89, σ_j = 50, x_j = 50 %.

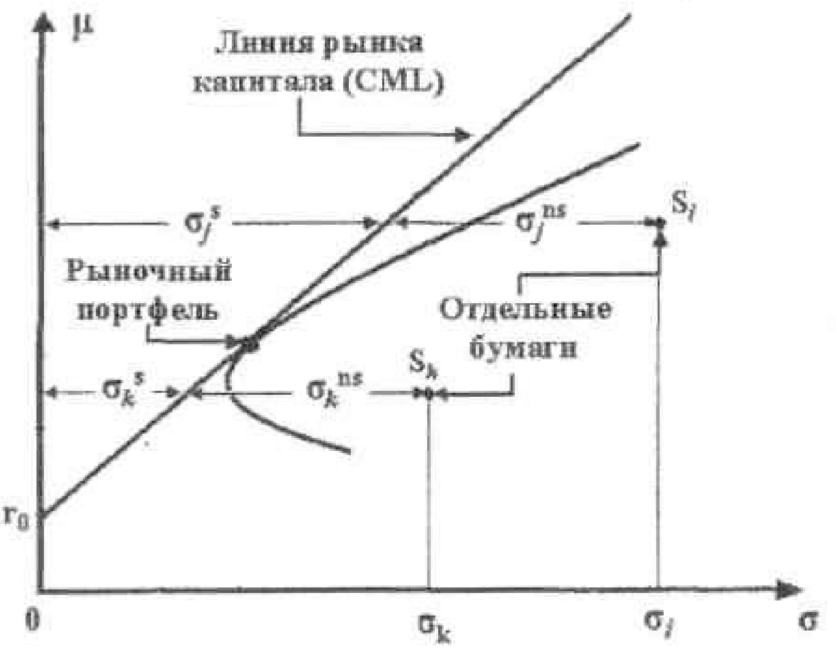

Рис. 1.5. Систематический σ_j^s, σ_k^s и диверсифицируемый $\sigma_j^{ns}, \sigma_k^{ns}$ риски

Тогда систематический риск

$$\sigma_j^s = \beta_j \sigma_m = 0{,}89 \cdot 30 = 26{,}70 \text{ \%},$$

диверсифицируемый риск

$$\sigma_j^{ns} = \sigma_j - \beta_j \sigma_m = 50 \cdot 0{,}89 \cdot 30 = 23{,}30 \text{ \%}.$$

Угловой коэффициент λ для линии бумаг *SML*

$\left(\text{см. уравнения } (1.14), (1.15)\right)$ $\lambda = \dfrac{x_m - r_0}{\sigma_m} = \dfrac{36}{30} = 1{,}2.$

Уравнение линии бумаг $\mu = 8 + 1{,}2\sigma^s = 8 + 1{,}2\operatorname{cov}(x_j, x_m)$.

Цены активов в модели CAPM. Пусть P_{j0} – сегодняшняя известная цена актива (ценной бумаги), а P_{j1} – ее неопределенная будущая цена. Требуется установить связь между этими величинами и безрисковой процентной ставкой r_0.

Доходность ценной бумаги в простейшем случае $x_j = \dfrac{P_{j1}}{P_{j0}} - 1$.

Применяя формулу (1.15), получаем $M\left(\dfrac{P_{j1}}{P_{j0}} - 1\right) = r_0 + \lambda \operatorname{cov}\left(\dfrac{P_{j1}}{P_{j0}} - 1, x_m\right)$. Заметим, что величина P_{j0} – это уже известная сегодняшняя цена, поэтому не случайна, и справедливо равенство $\operatorname{cov}(-1, x_m) = 0$. Вследствие чего имеем $M\left(\dfrac{P_{j1}}{P_{j0}} - 1\right) = r_0 + \lambda \dfrac{\operatorname{cov}(P_{j1} - 1, x_m)}{P_{j0}}$. Отсюда, выразив P_{j0}, получим

$$P_{j0} = \frac{M(P_{j1}) - \lambda \operatorname{cov}(P_{j1}, x_m)}{1 + r_0}. \qquad (1.17)$$

Формула (1.17) выражает тот факт, что для получения сегодняшней цены рыночной ценной бумаги необходимо из ее ожидаемой будущей цены $M(P_{j1})$ вычесть абсолютную премию за риск $\lambda \operatorname{cov}(P_{j1}, x_m)$ и затем дисконтировать по безрисковой процентной ставке r_0.

Абсолютная премия за риск – это разность между ожидаемой будущей ценой рисковой ценной бумаги и будущей ценой безрисковой ценной бумаги при условии, что в настоящее время их цены одинаковые. Математически абсолютная премия за риск равна величине $\lambda \operatorname{cov}(P_{j1}, x_m)$.

Обобщения модели CAPM. Существует множество различных моделей, обобщающих и развивающих CAPM. Мы остановимся на двух из них.

Пусть рассматривается N различных рынков, например, рынок акций промышленности, рынок акций топливно-энергетического комплекса, рынок акций наукоемких отраслей и др. Тогда существует соответствующее количество оптимальных портфелей со своими доходностями и рисками. Интерес представляет расчет ожидаемой доходности и риска оптимального портфеля, состоящего из ценных бумаг различных рынков. Для этой цели есть обобщенная модель ценообразования на рынке капитала G-CAPM (*General Capital Assets Pricing Model*) – модель, с помощью которой исследуется несколько рынков капитала.

Рассмотрим модель G-CAPM подробнее. Ожидаемые доходности x_j ценных бумаг портфеля, состоящего из бумаг только n-го рынка, определяются по формуле

$$x_j = r_0 + (x_n - r_0)\beta_{j,n}, \quad n = 1, \ldots, N,$$

где r_0 – доходность безрисковых ценных бумаг; x_n – ожидаемая доходность оптимального портфеля n-го рынка; $\beta_{j,n}$ – коэффициент, рассчитанный по отношению к n-му рынку. Если в каждый рынок n вложено K_n средств, то доля соответствующих средств во всем рыночном капитале вычисляется по правилу

$$y_n = \frac{K_n}{\sum_{n=1}^{N} K_n}. \tag{1.18}$$

Модель G-CAPM утверждает, что в условиях равновесия справедливо соотношение

$$x_j = r_0 + \sum_{n=1}^{N} [y(x_n - r_0)\beta_{j,n}]. \tag{1.19}$$

Из формулы (1.19) получаем

$$x_j = r_0 + \frac{\sum_{n=1}^{N} K_n (x_n - r_0)\beta_{j,n}}{\sum_{n=1}^{N} K_n}.$$

В условиях идеальных финансовых рынков с полной информацией все инвесторы вкладывают деньги в портфели с максимальным отношением дополнительной доходности к неопределенности. При этом указанное отношение должно быть одинаковым на всех рынках. Здесь $\beta_{j,n} = \beta_j$ и обобщенная модель ценообразования G-CAPM становится моделью CAPM. В условиях неполноты информации и ненулевой трансакционной стоимости, например при учете комиссионных при купле–продаже ценных бумаг, отношение дополнительной доходности по сравнению с доходностью при купле–продаже безрисковых бумаг к неопределенности дохода может быть различным на различных финансовых рынках. В этом случае обобщенная модель G-CAPM дает более точные результаты.

Вплоть до 1976 г. развитие финансовой теории шло под доминирующим влиянием CAPM. В 1977 г. эта теория подверглась жесткой критике в работах Ричарда Ролла. Он высказал мнение, что CAPM следует отвергнуть, поскольку она в принципе не допускает эмпирической проверки. Вопрос о принципиальной верифицируемости CAPM вызывает горячие споры и по сей день. Примерно в это же время Стивом Россом была предложена альтернативная модель оценки капитальных активов, развитая в рамках *арбитражной теории ценообразования* и получившая название арбитражной модели, или APM. Эта модель строится на основе принципа, состоящего в том, что соотношение между ожидаемой доходностью и риском должно быть таким, чтобы ни один индивидуальный инвестор не мог получить неограниченный доход от арбитражной сделки. Этот принцип невозможности арбитража можно сформулировать в «физических» терминах как невозможность создать «финансовый вечный двигатель», т. е. машину без всякого риска, неограниченно долго «вытягивающую» деньги с рынка. Адепты арбитражной теории (*Arbitrage Pricing Theory*), в частности, С. Росс и Р. Ролл, утверждают, что эта теория допускает, по крайней мере в принципе, эмпирическую проверку.

Арбитражная модель ценообразования представляет собой скорее конкурирующую с CAPM модель, чем дополняющую ее. В ней предполагается, что доходность r_j ценной бумаги определяется некоторым фиксированным набором факторов. В качестве таких ведущих факторов выбираются индексы известных портфелей, уровень инфляции, величина ставки рефинансирования и др. В модели могут присутствовать сразу несколько факторов. В наиболее простом случае, когда фактор один, доходность ценной бумаги связана с фактором соотношением

$$r_j = M(r_j) + \beta_j \left(I - M(I)\right) + e_j,$$

где β_j – коэффициент, связывающий изменения в значениях фактора I и доходности r_j; I – значение фактора, обеспечивающего доходность ценной бумаги; $M(I)$ – математическое ожидание этого фактора; e_j – случайный шум.

Заметим, что, взяв в качестве ведущего фактора доходность рыночного портфеля, мы придем к модели CAPM.

Обе модели – CAPM и APTM – требуют расчета коэффициентов β_j. Для вычисления β_j достаточно иметь статистику, состоящую из пар значений (r_m, r_j), и с помощью линейной регрессии получить уравнение

$$x_j = r_0 + (x_m - r_0)\beta_j, \tag{1.20}$$

где x_j – доходность ценной бумаги; x_m – доходность рынка.

Линейную регрессию можно построить, используя соответствующую компьютерную программу, в частности, практически любые электронные таблицы. Без расчетов приближенное значение коэффициента β_j можно определить графически. Для этого в координатах x_m и x_j откладывают все возможные пары точек и проводят прямую, наилучшим образом их приближающую. Коэффициент наклона этой прямой и будет искомым коэффициентом β_j. При проведении такой прямой на глаз человек непроизвольно использует метод наименьших квадратов, т. е. минимизирует сумму квадратичных отклонений. Этот же метод используется и в электронных таблицах.

Заметим, что выше приведено упрощенное изложение вопросов, связанных с расчетом статистических характеристик ценной бумаги. В финансовых изданиях наряду с параметром β ценной бумаги обычно приводится еще ряд характеристик, в частности, так называемое «приспособленное» β (*adjusted* β), скорректированное с учетом тенденции постепенного приближения к единице, характерной для данного показателя. Кроме того, приводится коэффициент α бумаги, позволяющий инвестору получить представление о соответствии текущей цены бумаги и той, которая относится к равновесному рынку. Указывается также целый ряд параметров, характеризующих собственно корректность статистических расчетов.

Вопросы и задачи

1. Банк предлагает следующий вклад:

Срок вклада, в днях	Вклад в евро, % годовых
До 95	8
96–125	8,5
126–185	9
186–390	9,5

Господин Петров желает разместить свои средства (50 000 евро)

на 390 дней. Начисление процентов производится каждый 30 день с момента начала вклада, расчетное количество дней в году 365, проценты по вкладу начисляются согласно приведенным данным. Согласно п.п. 2 п. 2 ст. 212 НК РФ и п. 2 ст. 224 НК РФ, доходы физических лиц в виде процентов по вкладам в иностранной валюте с превышения суммы доходов, полученных по условиям договора, на 9 % годовых облагаются налогом на доходы физических по ставке 35 %.
Вопрос. Не будет ли выгоднее положить деньги 2 раза на 180 дней под 9 % годовых, чем 1 раз на 390 дней под 9,5 % годовых? Какова максимальная сумма, которую может получить господин Петров через 390 дней, используя данный вклад?

2. Господин Иванов принял решение положить 7 500 000 р. в банк с целью накопить на автомобиль «Maybach 62» стоимостью 15 000 000 р. Собрав предложения банков, он остановился на двух вариантах: банк А предлагал вклад под 11 % годовых с капитализацией каждые 30 дней на неограниченный срок; банк Б предлагал 15 % годовых без возможности капитализации вклада в течение всего срока (срок неограничен).
Вопрос. Используя какой вклад, господин Иванов быстрее накопит на автомобиль, сколько для этого потребуется времени? Расчетное количество дней в году 365.

3. При покупке телевизора стоимостью 10 000 р. (при условии расчета наличными 9 500 р.) в магазине, торгующем бытовой техникой в кредит, установлены следующие условия: сумма выдаваемого кредита 10 000 р.; срок 10 мес.

Сумма платежей, в соответствии с которыми погашается кредит, рассчитывается следующим образом: в течение 10 мес. ежемесячно погашается 1/10 часть суммы 10 000 р., выплачиваются проценты из расчета 10 % · 10 000 р. / 10 мес. = 100 р., кроме того, за каждый ежемесячный платеж взимается комиссия в размере 1 % от суммы общей ежемесячной выплаты. За ведение ссудного счета при выдаче кредита единовременно взимается комиссия в размере 1 % от суммы кредита.
Задание 1. Построить поток платежей для указанных условий.
Задание 2. Пользуясь пакетом MS Excel, рассчитать годовой IRR полученного потока платежей.

4. Предлагается ипотечный кредит на долевое строительство. Срок кредитования 5 лет. Платежи по кредиту (тело кредита, погашаемое равными долями, плюс проценты, начисляемые на остаток ссудной задолженности) выплачиваются ежеквартально. Дом строится в течение 3 лет. Через 3 г. дом принимается государственной комиссией. С этого момента необходимо ежегодно страховать имущество на сумму оставшейся задолженности. Страховая премия рассчитывается как 2 % от суммы оставшейся задолженности. Сумма кредита 1 400 000 р. Ставка по кредиту 15 % годовых.

Задание. Построить поток платежей для указанных условий.

5. Необходимо взять 100 000 р. сроком на 1 г. Имеется 2 кредита.

Сумма кредита 100 000 р., ставка 24 % годовых, первоначальная комиссия 3 % в момент получения кредита, ежемесячная комиссия – 1,5 % от первоначальной суммы кредита. Проценты начисляются на остаток задолженности по кредиту.

Сумма кредита 100 000 р., ставка 14 % годовых, первоначальная комиссия 4 % в момент получения кредита, ежемесячная комиссия 2 % от первоначальной суммы кредита. Проценты начисляются на остаток задолженности по кредиту.

Задание. Построить поток платежей по данным кредитам, рассчитать эффективную годовую ставку и выбрать более дешевый кредит по правилу IRR. Для упрощения число дней в месяце принять равным 365/12.

6. Инвестор имеет статистику за 6 мес. по акциям «Газпрома». На начало периода (27.06.2004 г.) они котировались по цене 59,8 р. за акцию, на конец года (26.12.2004 г.) – по 76,2 р.

Инвестор, владея инсайдерской информацией, знает, что доходность по данному активу предположительно будет снижаться в течение каждых 6 мес. в два раза на протяжении трех лет. Кроме того, у инвестора имеется возможность купить у своего надежного партнера облигацию со сроком погашения через 3 г.

Вопрос. Какова должна быть процентная ставка по данной облигации (если исключить риск невыполнения партнером своего обязательства), чтобы инвестор предпочел ее акциям «Газпрома», использование инсайдерской информации по которым наказывается законодательством РФ?

7. Инвестор предоставил 1 000 000 р. управляющей компании на 5 лет. Управляющая компания выплатила инвестору в конце первого года 231 530 р., в конце второго года 271 567 р., в конце третьего 257 000 р., в конце четвертого года 260 111 р., в конце пятого года, на протяжении которого свирепствовал кризис, 194 548 р. Безрисковая процентная ставка в течение пяти лет была стабильной и каждый год равнялась 7 % годовых.

Задание 1. Найти NPV.

Еще 2 000 000 р. инвестор по совету своего друга Уоррена Баффета вложил в акции эфиопской железной дороги сроком на 3 г. В конце первого года инвестор получил дивиденды на сумму 6 000 000 р., в конце второго года 6 000 000 р., в конце третьего года дивидендов компания не выплатила, вследствие чего удалось реализовать акции лишь по их номинальной стоимости.

Задание 2. Необходимо рассчитать IRR вложения в акции железнодорожной компании.

8. Господину Иванову осталось 3 года до достижения пенсионного возраста. Негосударственный пенсионный фонд предлагает ему следующую программу: ежеквартально до достижения пенсионного возраста г-н Иванов выплачивает фонду 5 000 р. Через квартал после достижения пенсионного возраста фонд выплатит г-ну Иванову 75 000 р. Предполагается, что безрисковая ставка процента за последующие 3 г. не изменится и будет находиться на уровне 12 % годовых.

Задание. Найти NPV (посоветовать господину Иванову сотрудничать с фондом или нет).

9. Для акций компании K известно значение $\beta = 1{,}5$. Предположим, что рынок находится в равновесии (является идеальным конкурентным), безрисковая процентная ставка равна 6 %, ожидаемая доходность рыночного портфеля 14 %.

Вопрос. Какова ожидаемая доходность акции K?

10. Пусть в условиях идеального конкурентного рынка имеем два эффективных портфеля (решения задачи Тобина) со следующими характеристиками (табл. 1.3).

Таблица 1.3

Характеристики эффективных портфелей

Показатель	Портфель	
	A	B
Доходность μ (%)	26	18
Стандартное отклонение (риск) σ (%)	15	9

Задание. Найти безрисковую процентную ставку r_0

11. Рассмотрим идеальный конкурентный рынок. Безрисковая процентная ставка $r_0 = 0{,}04$, ожидаемая доходность рыночного портфеля $x_M = 0{,}10$, стандартное отклонение рыночной доходности (рыночный риск) $\sigma_M = 0{,}09$.

Задания. а) Рассчитать и изобразить линию рынка CML;

б) рассмотреть три ценные бумаги, которые имеют следующие коэффициенты ковариаций с доходностью рынка:

$$\mathrm{cov}(r_1, r_M) = \ \ 0{,}0108;$$

$$\mathrm{cov}(r_2, r_M) = -0{,}0027;$$

$$\mathrm{cov}(r_3, r_M) = \ \ 0{,}0054.$$

Изобразить линию бумаг SML и определить ожидаемые доходности данных бумаг;

в) определить коэффициенты β указанных бумаг;

г) приняв, что стандартные отклонения для бумаг равны соответственно $\sigma_1 = 0{,}20, \sigma_2 = 0{,}05$ и $\sigma_3 = 0{,}16$, определить диверсифицируемый риск каждой бумаги.

12. Инвестор узнал, что американская дочка швейцарской фирмы находится на грани банкротства. По слухам, по акциям этой фирмы в скором времени ожидается заметное снижение курса. Курс акций в данное время равен $S_0 = 50$ дол. Инвестор, не владелец акций, покупает 250 опционов PUT на акции с ценой исполнения $K = 45$ дол. и сроком исполнения 3 мес. Цена C опциона составляет 3 дол.

Вопрос. Каковы будут прибыль или убытки инвестора с учетом платы за опцион по опционной сделке каждый раз, если курс акций в ближайшие 3 мес.:

а) снизится до S 40 дол.;

б) останется в размере S 50 дол.;

в) поднимется до S 60 дол.

Как выглядит диаграмма результатов по опциону с точки зрения инвестора?

13. Инвестор покупает опцион: CALL с ценой исполнения 60 дол. стоит 5 дол., и PUT с ценой исполнения 55 дол. также стоит 5 дол. Построить график дохода по комбинации PUT+CALL (стрэнгл) в зависимости от цены базисного актива для инвестора и продавца стрэнгла.

14. Вычислить стоимость опциона CALL (европейского), если стоимость опциона PUT равна 5 дол., цена акции, на который выписывается опцион в начальный момент времени, равна 30 дол., цена исполнения 25 дол., безрисковая ставка до момента исполнения 10 %.

15. Инвестор одновременно покупает опцион CALL за 4 дол. с ценой исполнения 40 дол. и продает опцион CALL с ценой исполнения 45 дол. за 2 дол. Построить график дохода по комбинации $\mathrm{CALL}_1 + \mathrm{CALL}_2$ (спред) в зависимости от цены базисного актива.

2. СТРАХОВАНИЕ И АКТУАРНЫЕ РАСЧЕТЫ

2.1. Основные понятия актуарной математики

Актуарная математика изучает математические модели и методы в страховании. Простейшая модель договора страхования представлена на рис. 2.1.

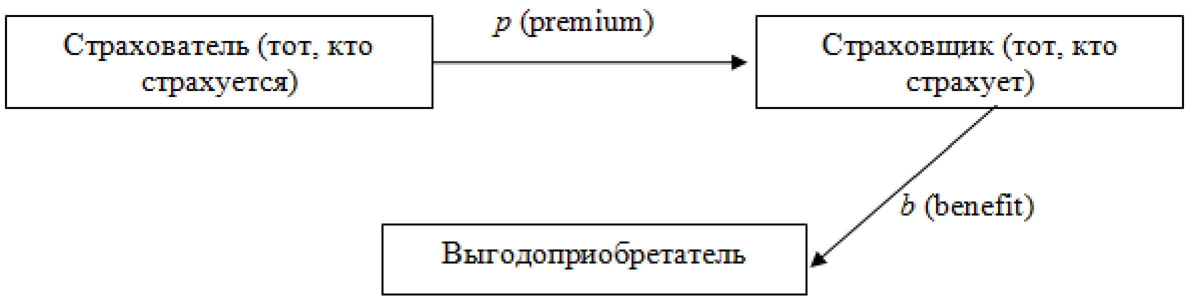

Рис. 2.1. Простейшая модель договора страхования

Здесь b – страховая выплата; p – страховая премия, т. е. плата за то, что при наступлении страхового случая страховщик выплатит страховую сумму b выгодоприобретателю. *Страховым тарифом* называют отношение страховой премии к страховой выплате p/b. Актуарные расчеты – это система математических и статистических методов, с помощью которых производится расчет страхового тарифа. Страховой тариф рассчитывается на основе вероятности наступления страхового случая, которая вычисляется с помощью данных статистики.

Функция выживания. Через X будем обозначать продолжительность жизни, которую будем считать случайной величиной. Основной характеристикой случайной величины считается функция распределения.

Функцией распределения случайной величины X называется числовая функция $F: R \to R$, которая каждому значению x ставит в соответствие вероятность $F(x) = P(X \le x)$.

Свойства функции распределения X, где X – произвольная случайная величина, следующие:

1) $F(x)$ – неубывающая,

т. е. $\forall x_1, x_2 \quad F(x_1) \le F(x_2)$, если $x_1 < x_2$;

2) $\forall x \quad 0 \le F(x) \le 1$,

$F(-\infty) = 0, F(+\infty) = 1$;

3) $F(x)$ непрерывна справа, т. е.

$$F(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} F(x).$$

Замечание: если $F(x) = P(X < x)$, то $F(x)$ непрерывна слева.

Если X – продолжительность жизни, то на функцию распределения $F(x)$ требуется наложить дополнительные ограничения:

1) $F(x)$ – строго возрастающая функция;

2) $\forall x \geq 0 \quad 0 \leq F(x) \leq 1, \quad F(0) = 0, F(+\infty) = 1$. В связи с тем что продолжительность жизни не отрицательна, то $\forall x \leq 0 \quad F(x) = 0$. Поэтому будем считать, что функция $F(x)$ определена на промежутке $[0, +\infty)$;

3) $F(x)$ непрерывна на $[0, +\infty)$;

4) существует предельный возраст ω и X принимает значения из отрезка $[0, \omega]$;

5) X принимает любое неотрицательное значение, но для больших x $F(x)$ мало отличается от 1.

Функцией выживания (*survival*) называется функция $s(x) = 1 - F(x) = P(X > x)$ – вероятность дожить до возраста x.

Свойства функции выживания:

1) $s(x)$ – строго убывающая функция на промежутке $[0, +\infty)$;

2) $\forall x \geq 0 \quad 0 \leq s(x) \leq 1, \quad s(0) = 1, s(+\infty) = 0$;

3) $s(x)$ непрерывна на $[0, +\infty)$.

Два типичных вида функции выживания представлены на рис. 2.2, *а*, *б*.

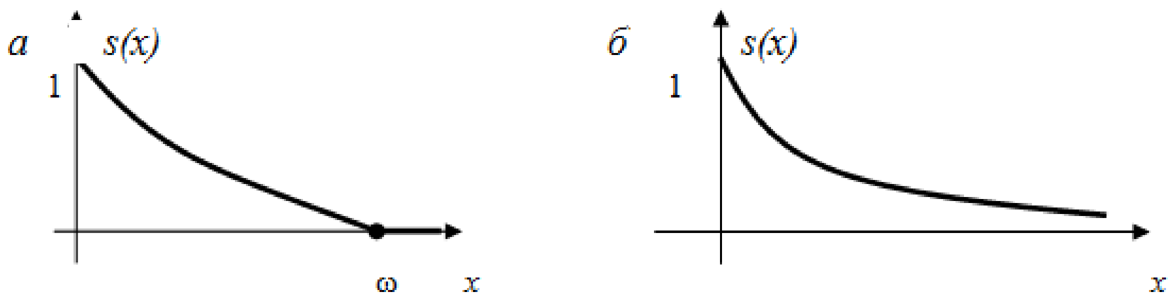

Рис. 2.2. Функции выживания

Через *E(X)* будем обозначать математическое ожидание случайной величины X, через Var X дисперсию случайной величины X.

$$I(A) = \begin{cases} 1, \text{если событие } A \text{ произошло}, \\ 0 - \text{в противном случае}. \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание
$E\{I(X_i > x)\} = 1P(X_i > x) + 0P(X_i \le x) = s(x)$.

Пусть l_x – среднее число живых представителей исследуемой группы возраста x, тогда

$$l_x = (EL(x)) = E\left(\sum_{i=1}^{l_0} I(X_i > x)\right) = \sum_{i=1}^{l_0} E\{I(X_i > x)\} = \sum_{i=1}^{l_0} s(x) = l_0 s(x).$$

Отсюда получаем статистический смысл функции выживания: $s(x) = \dfrac{l_x}{l_0}$.

Плотность распределения продолжительности жизни. Кривая смертей

Если функцию распределения случайной величины X можно представить в виде $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, то $f(x)$ называется плотностью распределения случайной величины X. Если X – продолжительность жизни, то $F(x) = \int_{0}^{x} f(t)dt$. Заметим, что $f(x) = F'(x)$ в точках непрерывности функции $f(x)$.

Поскольку $s(x) = 1 - F(x)$, то $s'(x) = -F'(x) = -f(x)$. В результате имеем связь между функцией выживания и плотностью распределения: $f(x) = -s'(x)$.

Свойства плотности распределения

1) $f(x) \ge 0 \quad \forall x \ge 0$;

2) $\int_{0}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Утверждение

$$P(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$$

Площадь фигуры на промежутке $[x_1, x_2]$ – это вероятность того, что продолжительность жизни попадет в этот промежуток (рис. 2.3).

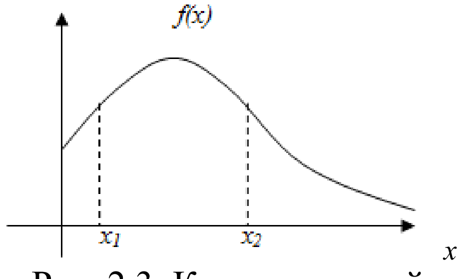

Рис. 2.3. Кривая смертей

Кривая смертей – это график плотности распределения.

Введем случайную величину ${}_tD_x$ – число умерших представителей исследуемой группы в возрасте из полуинтервала $(x,\ x+t]$. Свяжем эту величину с функцией L: ${}_tD_x = L(x) - L(x+t)$.

Пусть ${}_td_x$ – среднее число умерших представителей исследуемой группы в возрасте из полуинтервала $(x,\ x+t]$. Используя свойства математического ожидания и формулу Лагранжа, получаем

$$ {}_td_x = E\{L(x)-L(x+t)\} = l_x - l_{x+t} = l_0 s(x) - l_0 s(x+t) = l_0\left(s(x)-s(x+t)\right) = l_0 s'(c)\left(x-(x+t)\right) = $$
$$ = -l_0 s'(c)t = l_0 f(c)t, \quad c \in (x;\, x+t). $$

Таким образом, $\frac{{}_td_x}{l_0} = f(c)t$. Пусть t мало, тогда $c \approx x$, а значит, $\frac{{}_td_x}{l_0} \approx f(x)t$. Положим ${}_1d_x = d_x$, тогда $\frac{d_x}{l_0} \approx f(x)$.

Отсюда статистический смысл плотности следующий: это среднее число умерших в течение года, отнесенное к числу родившихся.

Связь функции выживания и плотности:

$$ s(x) = 1 - F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)dt - \int_0^{x} f(t)dt, \text{ т. е. } s(x) = \int_x^{+\infty} f(t)dt. $$

Интенсивность смертности. Интенсивностью смертности называется функция вида $\mu(x) = \frac{f(x)}{s(x)}$. Заметим, что $\mu(x) \approx \frac{d_x}{l_x}$.

Рассмотрим для человека, дожившего до x лет, вероятность смерти в течение последующих t лет:

$$ {}_tq_x = P(\underbrace{x < X \le x+t}_{A} / \underbrace{X > x}_{B}). $$

Формула вычисления условной вероятности $P(A\,|\,B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$.

В наших условиях $A \subset B$, следовательно, $AB = A$, тогда

$$ {}_tq_x = \frac{P(x < X \le x+t)}{P(X > x)} = \frac{F(x+t)-F(x)}{1-F(x)} = $$
$$ = \frac{1-s(x+t)-\left(1-s(x)\right)}{s(x)} = \frac{s(x)-s(x+t)}{s(x)} = \frac{-s'(c)}{s(x)}t \approx -\frac{s'(x)}{s(x)}t. $$
$$ {}_tq_x = \frac{s(x)-s(x+t)}{s(x)} = \frac{s'(c)\left(x-(x+t)\right)}{s(x)} = -\frac{s'(c)t}{s(x)} = \frac{f(c)}{s(x)}t; $$

при малых t ${}_tq_x \approx \frac{f(x)}{s(x)}t$; при $t = 1$ ${}_1q_x = q_x \approx \mu(x)$, $\mu(x) \approx q_x = \frac{d_x}{l_x}$.

Поэтому

$$ \mu(x) = \frac{-s'(x)}{s(x)} = \frac{f(x)}{s(x)} = \frac{f(x)}{1-F(x)};\ {}_tq_x \approx \mu(x)t. $$

Заметим, что $\mu(x) = \dfrac{f(x)}{s(x)}$ определена, если $s(x) > 0$.

Графическое изображение интенсивности смертности представлено на рис. 2.4. Закрашенная площадь – это ${}_tq_x$.

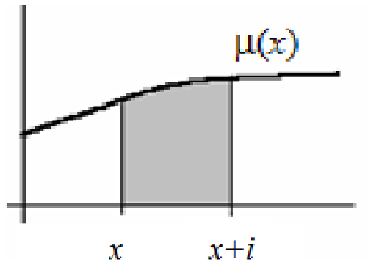

Рис. 2.4. Графическое изображение

Свойства интенсивности смертей:

1) $\mu(x) \geq 0$ $\forall x \geq 0$ – свойство следует из определения;

2) $\int\limits_0^{+\infty} \mu(x)dx = +\infty$, т. е. интеграл расходится.

Свойства 1 и 2 полностью характеризуют интенсивность смертности;

3) $s(x) = e^{-\int\limits_0^x \mu(t)dt} = \exp(-\int\limits_0^x \mu(t)dt)$.

Замечание. Если $\mu(x)$ – непрерывная функция, то

$$(\int\limits_0^x \mu(t)dt)' = \mu(x).$$

2.2. Аналитические законы смертности

Модель де Муавра (1729). Предположим, что случайная величина «продолжительность жизни» имеет равномерное распределение на отрезке [0, ω], где ω – предельный возраст, т. е. плотность распределения продолжительности жизни имеет вид (рис. 2.5):

$$f(x) = \begin{cases} 1/\ , & x \in [0,\ \omega]; \\ 0, & x \notin [0,\ \omega]. \end{cases}$$

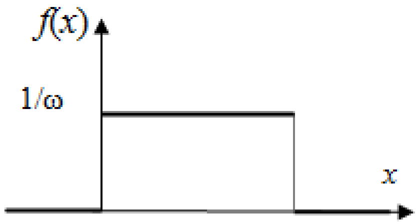

Рис. 2.5. График плотности распределения жизни

Интенсивность смертности (рис. 2.6):

$$\mu(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{s(x)}=\dfrac{1/\omega}{1-x/\omega}=\dfrac{1}{\omega-x}, & x\in[0,\ \omega];\\ \text{не}\quad\text{определена}, & x\notin[0,\ \omega].\end{cases}$$

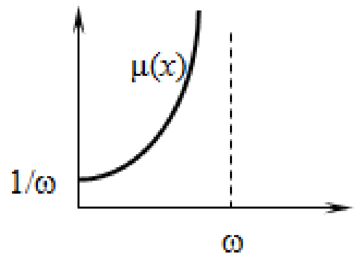

Рис. 2.6. График интенсивности смертности

Модель Гомпертца (1825). За исходную величину берется интенсивность смертности и ее считают экспоненциальной функцией $\mu(x)=Be^{\alpha x}$, $\alpha>B>0$, где B, α – константы (рис. 2.7). Тогда функция выживания (рис. 2.8) имеет вид

$$s(x)=\exp(-\int\limits_0^x Be^{\alpha t}dt)=\exp(-\frac{B}{\alpha}e^{\alpha t}\,|_0^x)=\exp\left(-\frac{B}{\alpha}(e^{\alpha x}-1)\right).$$

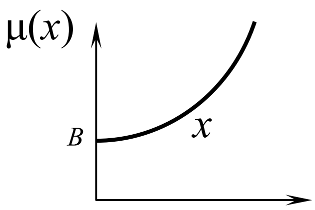

Рис. 2.7. Интенсивность смертности
в модели Гомпертца

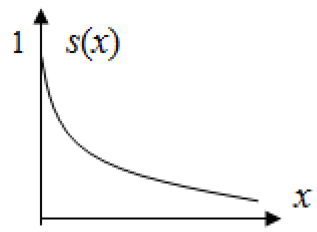

Рис. 2.8. Функция выживания

Остаточная продолжительность жизни. В страховую компанию обращается человек, доживший до какого-либо возраста, поэтому важна не сама продолжительность жизни, а остаточная продолжительность жизни.

Остаточной продолжительностью жизни называется случайная величина $T(x)=X-x$, где X – продолжительность жизни; x – возраст страхователя.

Для нахождения вероятностных характеристик $T(x)$ необходимо пересчитать все вероятности при условии, что произошло событие $\{X>x\}$ («страхователь дожил до возраста x»).

Функция распределения случайной величины $T(x)$

$$F_x(t)=P\langle T(x)\le t\,|\,X>x\rangle=P\langle X-x\le t\,|\,X>x\rangle=P\left\langle \underbrace{X\le x+t}_{A}\,\middle|\,\underbrace{X>x}_{B}\right\rangle=P\langle A|B\rangle=\frac{P(AB)}{P(B)}=$$

$$=\frac{P(x<X<x+t)}{P(X>x)}=\frac{F(x+t)-F(x)}{1-F(x)};$$

$$F_x(t)=\frac{F(x+t)-F(x)}{1-F(x)},$$

где $F(x)$ – функция распределения продолжительности жизни X.

Функция выживания для случайной величины $T(x)$:

$$s_x(t)=P\langle T(x)>t\,|\,X>x\rangle=1-F_x(t)=1-\frac{F(x+t)-F(x)}{1-F(x)}=\frac{1-F(x+t)}{s(x)}=\frac{s(x+t)}{s(x)};$$

$$s_x(t)=\frac{s(x+t)}{s(x)}.$$

Плотность распределения для случайной величины $T(x)$ определяется как

$$f_x(t)=\left(-s_x(t)\right)'_t=-\frac{s'(x+t)}{s(x)}=\frac{f(x+t)}{s(x)},$$

$$f_x(t)=\frac{f(x+t)}{s(x)}.$$

Чтобы из графика функции $f(x)$ (рис. 2.9, *а*) получить график $f_x(t)$, необходимо выполнить сдвиг влево и растяжение вдоль оси ординат, как показано на рис. 2.9, *б*.

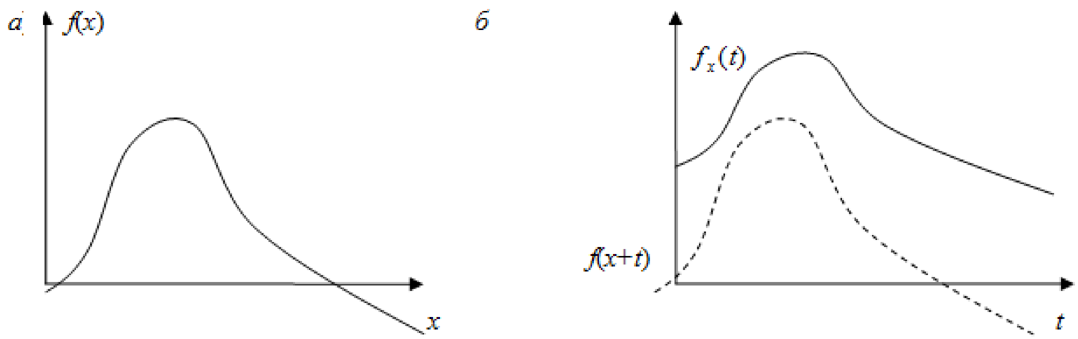

Рис. 2.9. Интенсивность смертности для случайной величины $T(x)$

$$T(x) \text{ равна } \mu_x(t)=\frac{f_x(t)}{s_x(t)}=\frac{f(x+t)/s(x)}{s(x+t)/s(x)}=\frac{f(x+t)}{s(x+t)}=\mu(x+t);$$

$$\mu_x(t)=\mu(x+t).$$

Заметим, что

$$F_x(t)=\frac{F(x+t)-F(x)}{s(x)}=\frac{1-s(x+t)-1+s(x)}{s(x)}=\frac{s(x)-s(x+t)}{s(x)}={}_tq_x,$$

где ${}_tq_x$ – вероятность для человека возраста x умереть в последующие t лет.

Рассмотрим модель де Муавра:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\omega}, & 0\le x\le\omega,\\ 0, & x>\omega;\end{cases}\quad s(x)=\begin{cases}1-\dfrac{x}{\omega}, & 0\le x\le\omega,\\ \\ 0, & x>\omega;\end{cases}$$

$$f(x+t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\omega}, & 0\le x+t\le\omega,\\ 0, & x+t>\omega;\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{\omega}, & 0\le t\le\omega-x,\\ 0, & t>\omega-x.\end{cases}$$

При $0\le t\le \omega\text{-}x$ $\quad f_x(t)=\dfrac{1/\omega}{1-x/\omega}=\dfrac{1}{\omega-x}$.

Таким образом, получаем плотность остаточного времени жизни в модели де Муавра:

$$f_x(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\omega-x}, & 0\le t\le\omega-x,\\ 0, & t>\omega-x.\end{cases}$$

Вывод: при переходе к остаточной продолжительности жизни модель де Муавра сохранила свою форму.

Вопросы

1. Что изучает актуарная математика? Кто такие актуарии?
2. Объясните значения терминов: страхователь, страховщик, страховая премия, страховая выплата.
3. Каковы свойства функции распределения продолжительности жизни?
4. Что такое функция выживания? Перечислите свойства этой функции.
5. Каков статистический смысл функции выживания?
6. Каковы свойства плотности распределения продолжительности жизни?
7. Каков статистический смысл плотности распределения продолжительности жизни?
8. Дайте определение интенсивности смертности. Каковы свойства этой функции?

9. Как вычислить среднюю продолжительность жизни: а) зная плотность продолжительности жизни; б) зная функцию выживания?

10. Как вычислить дисперсию продолжительности жизни: а) зная плотность продолжительности жизни; б) зная функцию выживания?

11. Какова модель де Муавра?

12. Какова модель Гомпертца?

13. Каковы модели Мэйкхама и Вейбулла?

2.3. Анализ моделей краткосрочного страхования жизни. Индивидуальный иск. Нетто-премия

В актуарной математике модели страхования жизни делятся на две большие группы в зависимости от того, принимается ли в расчет изменение ценности денег с течением времени, т. е. можно ли получить доход от инвестирования страховых премий и учитывается ли инфляция в наших моделях. Если ценность денег со временем не меняется, нет инфляции, нельзя получить доход от премии, то имеем дело с краткосрочным страхованием жизни (*short-term insurance*), в другом случае – с долгосрочным страхованием жизни (*long-term insurance*).

Элементарной составляющей модели является индивидуальный иск.

Индивидуальный иск – сумма средств, которые будут выплачены одному выгодоприобретателю по одному страховому договору.

Индивидуальный иск ξ – случайная величина и элементарная составляющая риска с точки зрения страховой компании. Иск к страховой компании часто называется *убытком*, или *ущербом*.

В рамках теории рисков будут рассматриваться следующие модели:

1) модели индивидуального риска (МИР).

• Рассматривается фиксированный относительно короткий промежуток времени, в течение которого можно пренебречь инфляцией и не учитывать доход от инвестирования страховой премии;

• число договоров N есть фиксированная неслучайная величина; все страховые премии фиксируются в начале периода;

• p_i – страховая премия, полученная по i-му ($i = 1, 2, \ldots, N$) договору;

• u – активы (капитал) страховой компании, т. е. сумма всех страховых премий,

$$u = \sum_{i=1}^{N} p_i \ ;$$

• ξ_i – индивидуальный иск по i-му договору;

• все случайные величины ξ_i (i = 1, 2, …, N) независимы;

2) модели коллективного риска (МКР).

• Рассматривается фиксированный относительно короткий промежуток времени, в течение которого можно пренебречь инфляцией и не учитывать доход от инвестирования страховых премий;

• число договоров N есть случайная величина;

• все страховые премии фиксируются в начале периода;

• p_i – страховая премия, полученная по i-му (i = 1, 2, …, N) договору;

• u – активы (капитал) страховой компании, т. е. сумма страховых премий,

$$u = \sum_{i=1}^{N} p_i \ ;$$

• ξ_i – индивидуальный иск по i-му договору;

• случайные величины ξ_i (i = 1, 2, …, N) независимы;

• ξ_i (i = 1, 2, …, N) одинаково распределены.

Обозначим через

$$S = \sum_{i=1}^{N} \xi_i$$

суммарный иск или сумму средств, которые будут выплачены по всем договорам. В таком случае событие $S > u$ означает техническое разорение страховой компании, событие $S \le u$ – техническое неразорение, $P(S > u)$ – вероятность разорения, $P(S \le u)$ – вероятность неразорения. Заметим, что $F_S(u)$ – функция распределения случайной величины S, $F_S(u) = P(S \le u)$.

В моделях индивидуального риска (МИР) риск разорения обусловлен только случайностью предъявления иска индивидуальным страхователем, т. к. величина N фиксирована и не случайна. В моделях коллективного риска (МКР) риск разорения обусловлен случайностью предъявления иска всей совокупностью страхователей. Здесь случайность N вносит дополнительный риск.

В рамках изучения моделей краткосрочного страхования жизни рассматриваются следующие задачи:

1) по известным распределениям случайных величин ξ_i найти распределение $S=\sum_{i=1}^{N}\xi_i$;

2) по заданному уровню неразорения α найти наименьший капитал (сумму активов), который обеспечит данный уровень, т. е. при заданном α найти наименьшее значение $u=x_\alpha$, такое, что справедливо неравенство

$$P(S\le u)\ge\alpha.$$

Величина $u=x_\alpha$ называется квантилью уровня α;

3) при известном объеме капитала u найти оптимальное деление страховой премии среди страхователей $u=\sum_{i=1}^{N}p_i$.

Пусть ε (случайная величина) – прибыль страховой компании от заключения одного договора (страховой премии): $\varepsilon=\mathrm{p}-\xi$. Тогда среднее значение прибыли от заключения одного договора, или ожидаемая прибыль, равна $\mathrm{E}\varepsilon=E(p-\xi)=Ep-E\xi=p-E\xi$. Сформулируем принцип безубыточности: $E\varepsilon\ge0$. Откуда $p-E\xi\ge0$ и, следовательно,

$$p\ge E\xi. \qquad (2.1)$$

Нетто-премией называется минимальное значение страховой премии, удовлетворяющее неравенству (2.1), т. е.

$$p_0=E\xi.$$

Пример. В случае смерти страхователя в течение года страховая выплата составляет b рублей. Страховая компания не платит ничего, если в течение года не произойдет смерти страхователя. В таком случае индивидуальный иск имеет вид

$$\xi=\begin{cases}b, & \text{если произойдет страховой случай,}\\ 0, & \text{если не произойдет страховой случай.}\end{cases}$$

$$P(\xi=b)=q_x,$$

$$P(\xi=0)=1-q_x.$$

Распределения случайной величины имеет вид:

ξ	0	b
P	$1-q_x$	q_x

Нетто-премия: $p_0 = E\xi = bq_x$.

Часто в задачах полагают b = 1, и тогда индивидуальный иск имеет распределение Бернулли.

Приведем пример расчета характеристик суммарного иска с помощью формулы Бернулли. Напомним, что случайная величина имеет распределение Бернулли, $\xi_i \sim \mathrm{Ber}(q)$, если ряд распределения имеет вид

ξ_i	0	1
P	1 - q	q

Случайная величина S имеет биномиальное распределение $S \sim \mathrm{Bin}(N,q)$, если

$$P(S=k)=C_N^k q^k (1-q)^{N-k}, \quad k=0,\ 1,\ \dots, N.$$

Утверждение 1. Если случайные величины ξ_i имеют распределение Бернулли и параметры q и ξ_i, $i=1,\ 2,\ \dots, N$, – независимые случайные величины, то суммарный иск составляет $S=\sum_{i=1}^{N}\xi_i \sim \mathrm{Bin}(N,q)$, т. е. S имеет биномиальное распределение с параметрами N и q.

Утверждение 2. Если $\xi_1 \sim \mathrm{Bin}(n_1,q)$, $\xi_2 \sim \mathrm{Bin}(n_2,q)$ и случайные величины ξ_1, ξ_2 независимы, то $S=\xi_1+\xi_2 \sim \mathrm{Bin}(n,q)$, где $n=n_1+n_2$.

Утверждение 3. Если индивидуальные иски ξ_i, $i=1,\ \dots, N$, имеют биномиальное распределение и параметры их n_i, q и ξ_i независимы, то суммарный иск имеет биномиальное распределение с параметрами q и n, где $n=\sum_{i-1}^{N} n_i$.

Утверждение 4. Если случайные величины ξ_1, ξ_2 имеют распределение Пуассона, т. е. $\xi_1 \sim \Pi(\lambda_1)$, $\xi_2 \sim \Pi(\lambda_2)$, и ξ_1, ξ_2 независимы, то $S=\xi_1+\xi_2 \sim \Pi(\lambda)$, где $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$.

Утверждение 5. Если индивидуальные иски имеют распределение Пуассона, $\xi_i \sim \Pi(\lambda_i)$, ξ_i – независимые величины, то $S=\sum_{i=1}^{N}\xi_i \sim \Pi(\lambda)$, где $\lambda=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i$.

Приведем пример использования формулы свертки для непрерывных распределений. Пусть известно распределение независимых случайных величин $\xi_i \sim U(0,\ b)$. Необходимо найти распределение $S=\xi_1+\xi_2$ и квантиль x_α.

$$f_1(x) = f_2(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b}, & x \in [0, b], \\ 0, & x \notin [0, b]; \end{cases}$$

$$f_S(u) = \int_0^u f_1(x) f_2(u-x) dx;$$

$$f_2(u-x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b}, & 0 \le u - x \le b, \\ 0, & u - x < 0, \text{ или } u - x > b, \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{1}{b}, & u - b \le x \le u, \\ 0, & x < u - b, \text{или } x > u. \end{cases}$$

График функции $f_1(x)$ приведен на рис. 2.10.

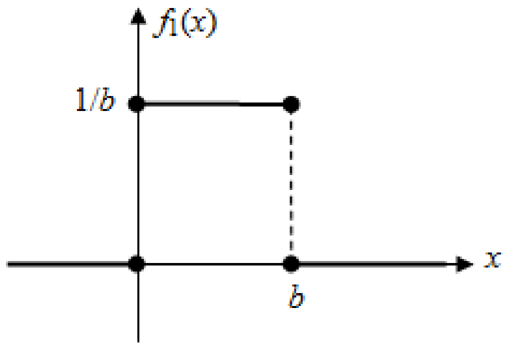

Рис. 2.10. График функции равномерного распределения на промежутке от 0 до b

Если $u < 0$ или $u > 2b$, то $f_1(x) f_2(u-x) = 0$, т. к. $f_1(x) = 0$ при $x \le u < 0$ или $x \ge u > 2b$. Поэтому $f_S(u) = 0$.

Если $0 \le u \le b$, то при $0 \le x \le u$ $f_1(x) f_2(u-x) = \dfrac{1}{b}\dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{b^2}$ (рис. 2.11). Поэтому

$$f_S(u) = \int_0^u \frac{1}{b^2} dx = \frac{u}{b^2}.$$

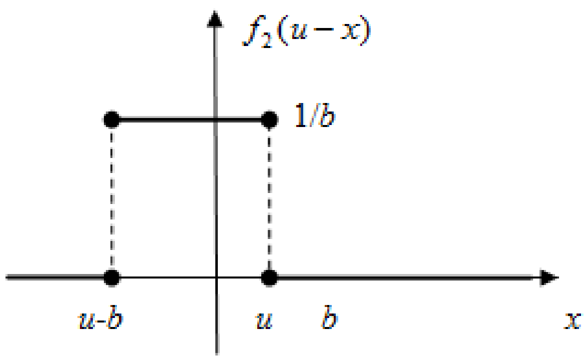

Рис. 2.11. График функции равномерного распределения на промежутке от $u - b$ до u

Если $b<u\le 2b$, то при $0\le x\le u-b$ $f_1(x)f_2(u-x)=\frac{1}{b}\cdot 0=0$, при $u-b\le x\le b$ $f_1(x)f_2(u-x)=\frac{1}{b}\frac{1}{b}=\frac{1}{b^2}$, при $b\le x\le u$ $f_1(x)f_2(u-x)=0\frac{1}{b}=0$ (рис. 2.12).

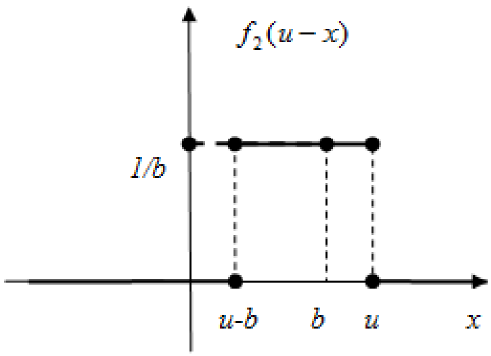

Рис. 2.12. График функции равномерного распределения на промежутке от $u-b$ до u

Поэтому $f_S(u)=\int\limits_{u-b}^{b}\frac{1}{b^2}dx=\frac{1}{b^2}(b-u+b)=\frac{2b-u}{b^2}$.

Итак, плотность распределения случайной величины S имеет вид

$$f_S(u)=\begin{cases}0, & u\le 0,\\ \dfrac{u}{b^2}, & 0\le u\le b,\\ \dfrac{2b-u}{b^2}, & b\le u\le 2b,\\ 0, & u>2b.\end{cases}$$

Это означает, что S имеет распределение Симпсона, или равнобедренного треугольника (рис. 2.13). Найдем функцию распределения случайной величины S: $F_S(u)=\int\limits_0^u f_S(x)dx$.

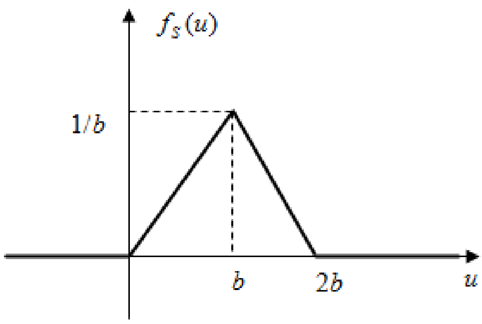

Рис. 2.13. График функции плотности распределения Симпсона

Если $0 \le u \le b$, то $F_S(u) = \int\limits_0^u \frac{x}{b^2} dx = \left. \frac{x^2}{2b^2} \right|_0^u = \frac{u^2}{2b^2}$.

Если $b \le u \le 2b$, то

$$F_S(u) = \int\limits_0^u f_S(x) dx = \int\limits_0^b \frac{x}{b^2} dx + \int\limits_0^u \frac{2b-x}{b^2} dx = \frac{1}{2} - \left. \frac{(x-2b^2)^2}{2b^2} \right|_b^u = \frac{1}{2} - \frac{(u-2b)^2}{2b^2} + \frac{1}{2} =$$

$$= 1 - \frac{(u-2b)^2}{2b^2}.$$

Поэтому

$$F_S(u) = \begin{cases} 0, \quad u \le 0, \\ \frac{u^2}{2b^2}, \quad 0 \le u \le b, \\ 1 - \frac{(u-2b)^2}{2b^2}, \quad b \le u \le 2b, \\ 1, \quad u \ge 2b. \end{cases}$$

График $F_S(u)$ представлен на рис. 2.14.

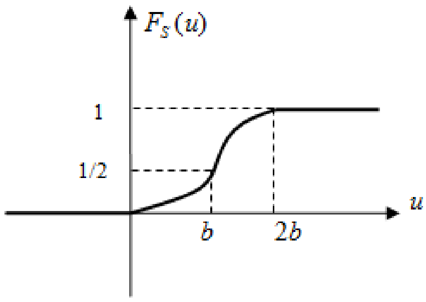

Рис. 2.14. График функции распределения
случайной величины S

Найдем квантиль как решение уравнения $F_S(u) = \alpha$. При $0 \le \alpha \le \frac{1}{2}$ уравнение имеет вид $\frac{u^2}{2b^2} = \alpha$. Поэтому $u = b\sqrt{2\alpha}$. Далее при $\frac{1}{2} < \alpha \le 1$ находим u из уравнения $1 - \frac{(u-2b)^2}{2b^2} = \alpha$.

$(u-2b)^2 = 2b^2(1-\alpha) \Rightarrow u - 2b = \pm b\sqrt{2(1-\alpha)}$.

С учетом условия $u \le 2b$ имеем $u = 2b - b\sqrt{2(1-\alpha)}$.

Итак, квантиль распределения S имеет вид

$$x_\alpha = \begin{cases} b\sqrt{2\alpha}, \quad 0 \le \alpha \le \frac{1}{2}, \\ 2b - b\sqrt{2(1-\alpha)}, \quad \frac{1}{2} < \alpha \le 1. \end{cases}$$

Приведем еще один пример применения формулы свертки для непрерывных распределений. Напомним, что случайная величина имеет экспоненциальное (показательное) распределение с параметром $\lambda > 0$ $\left(\xi \sim \mathrm{Exp}(\lambda)\right)$, если плотность распределения имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \end{cases}$$

случайная величина имеет распределение Эрланга с параметрами λ и n $\left(\xi \sim \mathrm{Erl}(\lambda, n)\right)$, если плотность

$$f(x) = \begin{cases} 0, \quad x < 0, \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Очевидно, что $\mathrm{Erl}(\lambda, 1) \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

Утверждение. Пусть $\xi_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, все ξ_i независимые, тогда $S = \sum\limits_{i=1}^{N} \xi_i \sim \mathrm{Erl}(\lambda, n)$.

Пример. Известно распределение двух независимых случайных величин: $\xi_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda_1)$, $\xi_2 \sim \mathrm{Exp}(\lambda_2)$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Необходимо найти распределение $S = \xi_1 + \xi_2$.

Решение. Плотности распределения случайных величин имеют вид:

$$f_i(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0, \\ \lambda_i e^{-\lambda_i x}, \quad x \geq 0, \end{cases}$$

тогда

$$f_2(u - x) = \begin{cases} 0, \ x > u, \\ \lambda_2 e^{-\lambda_2 (u-x)}, \ u - x \geq 0. \end{cases}$$

Применяя формулу свертки для непрерывных распределений, получаем

$$f_S(u) = \int\limits_0^u f_1(x) f_2(u-x) dx = \int\limits_0^u \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \lambda_2 e^{-\lambda_2 (u-x)} dx = e^{-\lambda_2 u} \lambda_1 \lambda_2 \int\limits_0^u e^{(\lambda_2 - \lambda_1) x} dx =$$

$$= e^{-\lambda_2 u} \lambda_1 \lambda_2 \left(\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1) x} \right) \Bigg|_0^u = \frac{e^{-\lambda_2 u} \lambda_1 \lambda_2 e^{\lambda_2 u} e^{-\lambda_1 u}}{\lambda_2 - \lambda_1} - \frac{e^{-\lambda_2 u} \lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} =$$

$$= \frac{\lambda_1 \lambda_2 \left(e^{-\lambda_1 u} - e^{-\lambda_2 u} \right)}{\lambda_2 - \lambda_1}, \ \ u \geq 0.$$

Принципы назначения страховых премий. Для страхователя и страховщика должен выполняться принцип эквивалентности финансовых обязательств.

Обязательство страхователя – внести страховую премию p.

Обязательство страховщика – оплатить индивидуальных иски ξ_i.

Каков должен быть принцип эквивалентности финансовых обязательств?

Нельзя приравнивать детерминированную и случайную величину $p = \xi_i$.

Если $p = E\xi_i$, $\quad S = \sum_{i=1}^{N} \xi_i$, то $u = \sum_{i=1}^{N} p_i = \sum_{i=1}^{N} E\xi_i = ES$.

Вероятность неразорения в этом случае

$$P(S \le u) = P(S \le ES) = P\left(\frac{S - ES}{\sqrt{\mathrm{Var}S}} \le 0\right) \approx \Phi(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{2}.$$

Итак, если $p = E\xi$, то $P(S \le u) = \dfrac{1}{2}$. При этом страхователь не несет никакого риска, а страховая компания имеет большой риск разорения. Страхователь должен оплатить этот риск.

Пусть $p_{0i} = E\xi_i$ − нетто-премия, p_i − страховая премия, которая учитывает риск страхователя, тогда

$p_i = p_{0i} + \Delta p_i$, где Δp_i − страховая надбавка за риск.

$u = ES + \Delta u$, где $\Delta u = x_\alpha \sqrt{\mathrm{Var}S}$.

$u = \sum_{i=1}^{N} p_i$, $ES = \sum_{i=1}^{N} p_{0i}$. Поэтому $\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \Delta p_i$. Разберем три принципа выбора Δp_i.

Принцип 1. Назначение страховых премий пропорционально математическим ожиданиям (нетто-премиям) индивидуальных исков.

$\Delta p_i = kE\xi_i = kp_{0i}$, где k − коэффициент пропорциональности, подлежащий определению.

$$x_\alpha \sqrt{\mathrm{Var}S} = \Delta u = \sum_{i=1}^{N} \Delta p_i = \sum_{i=1}^{N} kE\xi_i = k\sum_{i=1}^{N} E\xi_i = kES.$$ Поэтому

$$k = x_\alpha \frac{\sqrt{\mathrm{Var}S}}{ES}.$$

Найдем относительную страховую надбавку $\Theta_i^{(1)}$ и страховую премию, выбранную по первому принципу.

$$\Delta p_i = x_\alpha \frac{\sqrt{\mathrm{Var}S}}{ES} E\xi_i;\ \Theta_i^{(1)} = \frac{\Delta p_i}{p_{0i}} = x_\alpha \frac{\sqrt{\mathrm{Var}S}}{ESE\xi_i} E\xi_i = \frac{x_\alpha \sqrt{\mathrm{Var}S}}{ES};$$

$$\Theta_i^{(1)} = \frac{x_\alpha \sqrt{\mathrm{Var} S}}{ES};$$

$$p_i = p_{oi}(1 + \Theta_i^{(1)}).$$

Принцип 2. Назначение страховых премий пропорционально дисперсиям индивидуальных исков.

$$\Delta p_i = k \mathrm{Var} \xi_i,\ x_\alpha \sqrt{\mathrm{Var} S} = \Delta u = \sum_{i=1}^{N} \Delta p_i = k \sum_{i=1}^{N} \mathrm{Var} \xi_i = k \mathrm{Var} S;$$

$$k = \frac{x_\alpha}{\sqrt{\mathrm{Var} S}}.$$

$$\Theta_i^{(2)} = \frac{\Delta p_i}{p_{0i}} = \frac{x_\alpha}{\sqrt{\mathrm{Var} S}} \mathrm{Var} \xi_i \frac{1}{E\xi_i};$$

$$\Theta_i^{(2)} = \frac{x_\alpha}{\sqrt{\mathrm{Var} S}} \frac{\mathrm{Var} \xi_i}{E\xi_i}.$$

Принцип 3. Назначение страховых премий пропорционально средним квадратическим отклонениям индивидуальных исков.

$\Delta p_i = k\sqrt{\mathrm{Var} \xi_i}$; $\sum_{i=1}^{N} \Delta p_i = k \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\mathrm{Var} \xi_i}$. Введем характеристику суммарного иска $\gamma(S) = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\mathrm{Var} \xi_i}$. Тогда $x_\alpha \sqrt{\mathrm{Var} S} = k\gamma(S)$

$$\text{и} \quad k = \frac{x_\alpha \sqrt{\mathrm{Var} S}}{\gamma(S)}.$$

$$\Theta_i^{(3)} = \frac{\Delta p_i}{p_{0i}} = \frac{k\sqrt{\mathrm{Var} \xi_i}}{E\xi_i} = \frac{x_\alpha \sqrt{\mathrm{Var} S}}{\gamma(S)} \frac{\sqrt{\mathrm{Var} \xi_i}}{E\xi_i};$$

$$\Theta_i^{(3)} = \frac{x_\alpha \sqrt{\mathrm{Var} S}}{\gamma(S)} \frac{\sqrt{\mathrm{Var} \xi_i}}{E\xi_i}.$$

Для сравнения относительных страховых надбавок между собой приведем $\Theta_i^{(1)}$ к виду:

$$\Theta_i^{(1)} = \frac{x_\alpha \sqrt{\mathrm{Var} S}}{ES} = \frac{x_\alpha}{\sqrt{\mathrm{Var} S}} \frac{\mathrm{Var} S}{ES} = \frac{x_\alpha \sqrt{\mathrm{Var} S}}{\gamma(S)} \frac{\gamma(S)}{ES}.$$

Сравним $\Theta_i^{(1)}, \Theta_i^{(2)}, \Theta_i^{(3)}$.

Если $\frac{\mathrm{Var} \xi_i}{E\xi_i} < \frac{\mathrm{Var} S}{ES}$, т. е. собственный относительный риск меньше относительного риска всей страховой компании, то $\Theta_i^{(2)} < \Theta_i^{(1)}$.

Если $\frac{\sqrt{\mathrm{Var} \xi_i}}{E\xi_i} < \frac{\gamma(S)}{ES}$, то $\Theta_i^{(3)} < \Theta_i^{(1)}$.

Замечание. Если все индивидуальные иски имеют одинаковое распределение, то все принципы дают одинаковый результат $\Theta_i^{(1)} = \Theta_i^{(2)} = \Theta_i^{(3)}$ и страховые премии составят $p_i = \frac{u}{N}$.

Вопросы

1. Чем отличаются модели краткосрочного страхования жизни от моделей долгосрочного страхования?

2. Что такое индивидуальный иск? Суммарный иск? Нетто-премия?

3. Опишите модели индивидуального риска.

4. Опишите модели коллективного риска.

5. Какие задачи решаются при изучении моделей краткосрочного страхования жизни?

6. Какое распределение имеет суммарный иск, если индивидуальные иски распределены по закону Бернулли?

7. Какое распределение имеет суммарный иск, состоящий из двух индивидуальных исков, каждый из которых имеет равномерное распределение?

8. Сформулируйте принцип эквивалентности финансовых обязательств страхователя и страховщика.

9. Опишите принцип назначения страховых премий пропорционально математическим ожиданиям (нетто-премиям) индивидуальных исков.

10. Опишите принцип назначения страховых премий пропорционально дисперсиям индивидуальных исков.

11. Опишите принцип назначения страховых премий пропорционально средним квадратическим отклонениям индивидуальных исков.

12. Сравните между собой относительные страховые надбавки, полученные в соответствии с разными принципами.

13. Когда относительные страховые надбавки, полученные в соответствии с разными принципами, будут равны между собой?

2.4. Модели долгосрочного страхования жизни

Расчет нетто-премии при полном страховании жизни. При полном страховании жизни учитывается возможность дохода от инвестирования страховых премий и инфляция. Пусть t – время, измеренное в годах; C_0 – начальная сумма в момент времени $t = 0$; $C(t)$ – сумма в момент времени $t \geq 0$.

$C(t) = C_0 e^{\delta t}$ − формула непрерывного начисления процентов, где δ − годовая процентная ставка.

Вывод формулы. Пусть проценты начисляются n раз в год, тогда в конце года имеем сумму

$$C = C_0\left(1+\frac{\delta}{n}\right)\left(1+\frac{\delta}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{\delta}{n}\right) = C_0\left(1+\frac{\delta}{n}\right)^n.$$

Устремим $n \to \infty$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} C_0\left(1+\frac{\delta}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} C_0\left(1+\frac{\delta}{n}\right)^{\frac{n}{\delta}\delta} = C_0 e^{\delta}.$$

Сумма через t лет: $C(t) = C_0 \underbrace{e^{\delta}\cdot\ \ldots\ \cdot e^{\delta}}_{t} = C_0 e^{\delta t}$.

Заметим, что $C'(t) = \delta C_0 e^{\delta t} = \delta C(t)$ и $\delta = \dfrac{C'(t)}{C(t)}$ трактуется как относительная скорость изменения суммы денег.

Обобщим формулу непрерывного начисления процентов на случай, когда процентная ставка зависит от времени: $\delta = \delta(t)$. Решим задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{C'(t)}{C(t)} = \delta(t), \\ C(0) = C_0. \end{cases}$$

$$\int_0^t \delta(t)\,dt = \int_0^t \frac{C'(t)}{C(t)}\,dt = \ln C(t)\Big|_0^t = \ln C(t) - \ln C(0) = \ln\left(\frac{C(t)}{C_0}\right) \Rightarrow e^{\int_0^t \delta(t)dt} = \frac{C(t)}{C_0}.$$

Получили обобщенную формулу непрерывного начисления процентов

$$C(t) = C_0 \exp\left(\int_0^t \delta(\tau)\,d\tau\right).$$

Рассмотрим модель полного страхования жизни.

Страхователь платит страховщику страховую премию в размере p условных единиц. За это при наступлении страхового случая страховщик выплачивает выгодоприобретателю b условных единиц.

Существует два подхода к расчету нетто-премии.

Опишем первый подход. Пусть в момент времени $t=0$ имеется сумма p, к моменту T(x) (остаточное время жизни страхователя возраста x) эта сумма увеличится до $pe^{\delta T(x)}$. Пусть ε_1 − прибыль страховщика. Очевидно, что $\varepsilon_1 = pe^{\delta T(x)} - b$. Согласно принципу безубыточности, $E\varepsilon_1 \ge 0$.

$$E\left(pe^{\delta T(x)} - b\right) \ge 0 \Leftrightarrow pEe^{\delta T(x)} - b \ge 0 \Leftrightarrow pEe^{\delta T(x)} \ge b \Leftrightarrow p \ge \frac{b}{Ee^{\delta T(x)}}.$$

Нетто-премия (минимально возможное значение страховой премии, удовлетворяющее принципу безубыточности) имеет вид

$$p_{01} = \frac{b}{Ee^{\delta T(x)}}.$$

Заметим, что p_{01} − это страховая премия, при которой $E\varepsilon_1 = 0$.

Рассмотрим второй подход. Случайную величину $z = be^{-\delta T(x)}$ будем называть современной величиной будущей выплаты. Очевидно, что эту сумму необходимо иметь в момент времени t = 0, чтобы в момент t = T(x) выплатить сумму b. Пусть $\varepsilon_2 = p - be^{-\delta T(x)}$ − прибыль страховщика, отнесенная к моменту времени t = 0. Из условия, что ожидаемый доход равен нулю $(E\varepsilon_2 = 0)$, получаем $p - bEe^{-\delta T(x)} = 0$. В таком случае нетто-премия, соответствующая второму подходу, равна

$$p_{02} = bEe^{-\delta T(x)}.$$

Пример. Вычислим обе нетто-премии для модели де Муавра.

$$f_x(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega - x}, & 0 \le t \le \omega - x, \\ 0, & t > \omega - x, \end{cases}$$

$f_x(t)$ − плотность остаточной продолжительности жизни.

$$Ee^{\delta T(x)} = \int_0^{+\infty} e^{\delta t} f_x(t)\,dt = \int_0^{\omega - x} e^{\delta t} \frac{1}{\omega - x}\,dt = \frac{1}{\omega - x} \frac{e^{\delta t}}{\delta}\Bigg|_0^{\omega - x} = \frac{e^{\delta(\omega - x)} - 1}{\delta(\omega - x)}.$$

$$E\,\mathrm{e}^{-\delta T(x)} = \frac{e^{-\delta(\omega - x)} - 1}{-\delta(\omega - x)} = \frac{1 - e^{-\delta(\omega - x)}}{\delta(\omega - x)},$$

тогда

$$p_{01}=\frac{b\delta(\omega-x)}{e^{\delta(\omega-x)}-1},\quad p_{02}=\frac{b\left(1-e^{-\delta(\omega-x)}\right)}{\delta(\omega-x)}\ .$$

Докажем, что $p_{01}<p_{02}$. Действительно, данное неравенство соответствует неравенству $2+\left[\delta(\omega-x)\right]^2<e^{\delta(\omega-x)}+e^{-\delta(\omega-x)}$. Докажем последнее, положив $t=\delta(\omega-x)>0$.

$$e^t+e^{-t}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-t)^k}{k!}=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(2n)!}>2+t^2\,.$$

Ниже будет показано, что $p_{01}\le p_{02}$ для любой случайной величины $T(x)$.

Утверждение 1 (неравенство Коши–Буняковского)

$$E\left|X\times Y\right|=\sqrt{EX^2}\times\sqrt{EY^2}\ .$$

Утверждение 2. $Ee^{-\delta\cdot T(x)}=\dfrac{1}{Ee^{\delta\cdot T(x)}}$.

Предполагаем, что при вычислении нетто-премии применяется второй подход, $p_0=Ez=bEe^{-\delta T(x)}$, где $z=be^{-\delta T(x)}$.

Для простоты положим b = 1, тогда нетто-премия при полном страховании жизни имеет вид

$\bar{A}_x=E\,\mathrm{e}^{-\delta T(x)}$.

Напомним, что X – продолжительность жизни; $f(x)$ – плотность распределения продолжительности жизни; $s(x)$ – функция выживания, $f_x(t)$ – плотность распределения остаточного времени жизни, $f_x(t)=\dfrac{f(x+t)}{s(x)}$, $T(x)=X-x$.

Для вычисления нетто-премии при полном страховании жизни можно использовать формулу

$$\bar{A}_x=\int_0^{\infty}e^{-\delta t}f_x(t)dt\,. \tag{2.1}$$

Приведем вывод еще одной формулы

$$\bar{A}_x=\int_0^{\infty}e^{-\delta t}\frac{f(x+t)}{s(x)}dt=\frac{1}{s(x)}\int_0^{\infty}e^{-\delta t}f(x+t)dt=\begin{bmatrix}x+t=u\\ t=u-x\\ dt=du\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{s(x)}\int_x^{\infty}e^{-\delta(u-x)}f(u)du=\frac{e^{\delta x}}{s(x)}\int_x^{\infty}e^{-\delta u}f(u)du\,.$$

Таким образом,

$$\bar{A}_x = \frac{e^{\delta x}}{s(x)} \int_x^{\infty} e^{-\delta u} f(u) du .$$

Получим формулу для вычисления нетто-премии с использованием таблиц продолжительности жизни. Пусть x – целое число, тогда

$$\int_x^{+\infty} e^{-\delta t} f(t) dt = \sum_{k=x}^{+\infty} \int_k^{k+1} e^{-\delta t} f(t) dt = \begin{bmatrix} t-k=u \\ dt=du \\ t=u+k \end{bmatrix} = \sum_{k=x}^{+\infty} \int_0^1 e^{-\delta(u+k)} f(u+k) du =$$

$$= \sum_{k=x}^{+\infty} e^{-\delta k} \int_0^1 e^{-\delta u} f(u+k) du .$$

Следовательно,

$$\bar{A}_x = \frac{e^{\delta x}}{s(x)} \sum_{k=x}^{+\infty} e^{-\delta k} \int_0^1 e^{-\delta t} f(k+t) dt .$$

Можно сделать одно из предположений:

1) о равномерном распределении смертей;
2) о постоянной интенсивности смертей;
3) предположение Балдуччи.

Рассмотрим предположение о равномерном распределении смертей

$f(k+t) = s(k) - s(k+1)$ при $0 \le t \le 1$. Откуда

$$\int_0^1 e^{-\delta t} f(k+t) dt = \int_0^1 e^{-\delta t} \left(s(k) - s(k+1)\right) dt = \left(\frac{l_k}{l_0} - \frac{l_{k+1}}{l_0}\right) \cdot \int_0^1 e^{-\delta t} dt = \frac{l_k - l_{k+1}}{l_0} \left. \frac{e^{-\delta t}}{-\delta} \right|_0^1 =$$

$$= \frac{d_k}{l_0} \frac{e^{-\delta} - 1}{-\delta} = \frac{d_k \left(1 - e^{-\delta}\right)}{\gamma l_0};$$

$$\bar{A}_x = \frac{e^{\delta x}}{l_x / l_0} \sum_{k=x}^{\infty} e^{-\delta k} \frac{d_k \left(1 - e^{-\delta}\right)}{\delta l_0} = \frac{e^{\delta x} \left(1 - e^{-\delta}\right)}{\delta l_x} \sum_{k=x}^{\infty} d_k e^{-\delta k} = \frac{e^{\delta (x-1)} \left(e^{\delta} - 1\right)}{\delta l_x} \sum_{k=x}^{\infty} d_k e^{-\delta k}.$$

Следовательно, в предположении о равномерном распределении смертей справедливо равенство

$$\bar{A}_x = \frac{e^{\delta (x-1)} \left(e^{\delta} - 1\right)}{\delta l_x} \sum_{k=x}^{\infty} d_k e^{-\delta k} .$$

Вычислим дисперсию современной величины будущей выплаты. Заметим, что Ez^2 − это математическое ожидание современной величины будущей выплаты, вычисленное в предположении удвоенной процентной ставки (нетто-премия с удвоенной процентной ставкой), $Ez^2 = E\left(e^{-\delta T(x)}\right)^2 = Ee^{-2\delta T(x)} = {}^2\bar{A}_x$. В результате

$$\operatorname{Var} z = Ez^2 - \left(Ez\right)^2 = {}^2\bar{A}_x - \bar{A}_x^2.$$

Расчет нетто-премии для других видов страхования. Рассмотрим 5 видов страхования жизни:

1) n-летнее. При этом виде страхования страховая выплата производится, если застрахованный умер в течение срока действия договора, т. е. в течение n лет с момента начала действия договора, в противном случае страховая выплата не производится. Выпишем современную величину будущей выплаты z и найдем нетто-премию $\bar{A}^1_{x:n}$.

$$z = \begin{cases} e^{-\delta T(x)}, & T(x) \le n, \\ 0, & T(x) > n; \end{cases}$$

$$\bar{A}^1_{x:n} = Ez = \int_0^n e^{-\delta t} f_x(t)\,dt + \int_0^{+\infty} 0 \cdot f_x(t)\,dt = \int_0^n e^{-\delta t} f_x(t)\,dt.$$

Следовательно, справедливы следующие формулы для вычисления нетто-премии и дисперсии современной величины будущего иска для этого вида страхования:

$$\bar{A}^1_{x:n} = Ez = \int_0^n e^{-\delta t} f_x(t)\,dt;$$

$$\bar{A}^1_{x:n} = \frac{e^{\delta x}}{s(x)} \int_x^{x+n} e^{-\delta t} f(t)\,dt;$$

$$\bar{A}^1_{x:n} = \frac{e^{\delta x}\left(1 - e^{-\delta}\right)}{\delta l_x} \sum_{k=x}^{x+n-1} d_k e^{-\delta x};$$

$$\operatorname{Var} z = {}^2\bar{A}^1_{x:n} - \left(\bar{A}^1_{x:n}\right)^2;$$

2) n-летнее смешанное страхование жизни. Если смерть застрахованного наступила до истечения срока действия договора (n лет), то страховая выплата производится на момент смерти. Если застрахованный дожил до окончания срока действия договора, то выплата производится на момент окончания срока действия договора. Для этого вида страхования

$$z=\begin{cases} e^{-\delta T(x)}, & T(x)\le n,\\ e^{-\delta n}, & T(x)>n;\end{cases}$$

$$\bar{A}_{x:n}=\int_0^n e^{-\delta n} f_x(t)\,dt+\int_n^{+\infty} e^{-\delta n} f_x(t)\,dt=\bar{A}^1_{x:n}+e^{-n}\int_n^{+\infty} f_x(t)\,dt .$$

Вычислим второй интеграл и найдем нетто-премию $\bar{A}_{x:n}$ и дисперсию

$$\int_n^{+\infty} f_x(t)\,dt=\int_n^{+\infty}\frac{f(x+t)}{s(x)}dt=\frac{1}{s(x)}\int_n^{+\infty} f(x+t)\,dt=\frac{1}{s(x)}\int_{x+n}^{+\infty} f(t)\,dt=\frac{s(x+n)}{s(x)};$$

$$\bar{A}_{x:n}=\bar{A}^1_{x:n}+\frac{s(x+n)}{s(x)}e^{-\delta n};$$

$$\operatorname{Var} z={}^2\bar{A}_{x:n}-\left(\bar{A}_{x:n}\right)^2;$$

3) полное страхование, отсроченное на m лет. Страховая выплата производится на момент смерти застрахованного, если она произошла по истечении m лет с момента заклююочения договора. Если застрахованный умер до истечения m лет после заключения договора, страховая выплата не производится. В этом случае

$$z=\begin{cases} 0, & T(x)\le m,\\ e^{-\delta T(x)}, & T(x)>m;\end{cases}$$

$${}_{m|}\bar{A}_x=\int_m^{+\infty} e^{-\delta t} f_x(t)\,dt=\int_0^{+\infty} e^{-\delta t} f_x(t)\,dt-\int_0^{m} e^{-\delta t} f_x(t)\,dt=\bar{A}_x-\bar{A}^1_{x:m};$$

$$\operatorname{Var} z={}_{m|}^{2}\bar{A}_x-\left({}_{m|}\bar{A}\right)^2;$$

4) полное страхование жизни с непрерывно увеличивающейся величиной страховой выплаты. Предположим, что величина выплаты зависит от момента выплаты. Например,

$$z=T(x)e^{-\delta T(x)}.$$

Запишем нетто-премию для этого случая

$$\left(I\bar{A}\right)_x=Ez=\int_0^{+\infty} te^{-\delta t} f_x(t)\,dt .$$

Вычислим

$$Ez^2=E\left(T(x)e^{-\delta T(x)}\right)^2=\int_0^{+\infty} t^2e^{-2\delta t} f_x(t)\,dt .$$

Заметим, что для этого вида страхования $Ez^2 \neq {}^2\left(I\bar{A}\right)_x$;

5) полное страхование жизни с выплатой в конце года смерти. Момент выплаты $\left[T(x)\right]+1 = K(x)+1$, где x − возраст страхователя (целое число); K – округленное остаточное время жизни.
Современная величина будущей выплаты

$$z = e^{-\delta\left(K(x)+1\right)}.$$

Нетто-премия

$$A_x = Ez = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\delta(k+1)} P\left(K(x)=k\right) = e^{-\delta}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\delta k}\frac{s(x+k)-s(x+k+1)}{s(x)} =$$

$$= \frac{e^{-\delta}}{s(x)}\sum_{n=x}^{\infty} e^{-\delta(n-x)}\left(s(n)-s(n+1)\right) = \frac{e^{\delta(x-1)}}{s(x)}\sum_{n=x}^{\infty} e^{-\delta n}\left(s(n)-s(n+1)\right).$$

Этой формулой можно пользоваться, если известен аналитический закон смертности. Получим формулу для вычисления нетто-премии с помощью таблиц продолжительности жизни. Поскольку

$$s(x) = \frac{l_x}{l_0},\ s(n)-s(n+1) = \frac{l_n - l_{n+1}}{l_0} = \frac{d_n}{l_0},$$

постольку

$$A_x = \frac{e^{\delta(x-1)}}{l_x}\sum_{n=x}^{\infty} d_n e^{-\delta n}. \tag{2.2}$$

Сравнивая формулу 2.2 с формулой 2.1 в предположении о равномерном распределении смертей, получаем

$$A_x = \frac{e^{\delta}-1}{\delta}\bar{A}_x.$$

Общая схема для долгосрочного страхования жизни. Пусть $T(x)$ – остаточное время жизни (вероятностная характеристика страхователя возраста x); $\tau(t)$ − момент страховой выплаты, где t – момент наступления страхового случая; $b(\tau)$ − величина страховой выплаты в зависимости от момента выплаты τ; $\delta(t)$ − процентная ставка в момент t.

Современную величину будущей выплаты запишем в виде

$$z = b\left(\tau\left[T(x)\right]\right)\exp\left(-\int_0^{\tau\left[T(x)\right]}\delta(t)dt\right).$$

Покажем, как из этой общей схемы получаются некоторые вышеперечисленные частные случаи.

Полное страхование жизни:

$$\tau(t)=t,\ b(\tau)\equiv 1,\ \delta(t)\equiv\delta,$$

$$z=1\exp\left(\int\limits_0^{T(x)}\delta dx\right)=e^{-\delta T(x)};$$

n – летнее страхование жизни:

$$\tau(t)=t,\ b(\tau)=\begin{cases}1, & \tau\le n,\\ 0, & \tau>n;\end{cases}$$

$$z=\begin{cases}e^{-\delta T(x)}, & T(x)\le n,\\ 0, & T(x)>n;\end{cases}$$

n – летнее смешанное страхование жизни:

1 способ $\quad \tau(t)=t,\ b(\tau)\equiv 1,\ \delta(t)=\begin{cases}\delta, & t\le n,\\ 0, & t>n,\end{cases}\ \tau=t=T(x);$

2 способ $\quad \tau(t)=\min\{t,n\},\ b(\tau)\equiv 1,\ \delta(t)\equiv\delta;$

$$z=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\delta T(x)}, & T(x)\le n,\\ \mathrm{e}^{-\delta n}, & T(x)>n.\end{cases}$$

Таким же образом можно из общей схемы получить любую модель из перечисленных на с. 51–53.

Вероятность разорения страховой компании при долгосрочном страховании жизни. Рассмотрим общую схему долгосрочного страхования жизни. Предположим, что в момент времени $t = 0$ страхователи в количестве N человек внесли в фонд страховой компании страховые премии p_i, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ N$. В результате сформировался начальный капитал страховой компании

$$u=\sum_{i=1}^{N}p_i .$$

Пусть T_i – остаточное время жизни i-го страхователя (случайная величина); $b_i(\tau)$ − величина страховой выплаты; $\tau_i(t)$ − момент страховой выплаты, определяемый условиями договора; $\delta(t)$ − процентная ставка. Современная величина будущей выплаты i-му страхователю имеет вид

$$z_i = b_i\left(\tau_i\left(T_i\right)\right)\exp\left(-\int\limits_0^{\tau_i(T_i)} \delta(t)\,dt\right).$$

Введем обозначения: Y_i – величина выплаты, $Y_i = b_i\left(\tau_i\left(T_i\right)\right)$; t_i – момент выплаты i-му страхователю, $t_i = \tau_i\left(T_i\right)$, в таком случае

$$z_i = Y_i \exp\left(-\int\limits_0^{t_i} \delta(t)\,dt\right).$$

Предположим, что $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{N-1} < t_N$, u_k – капитал страховой компании сразу после выплаты в момент t_k.

Лемма

$$u_k = u\exp\left(\int\limits_0^{t_k} \delta(t)\,dt\right) - \sum_{i=1}^{k} Y_i \exp\left(\int\limits_{t_i}^{t_k} \delta(t)\,dt\right).$$

Условие $\forall k\ u_k \ge 0$ равносильно неразорению страховой компании. Получим условие неразорения в терминах начального капитала u и современных величин будущих выплат z_i, $i = 1, \ldots, N$.

Теорема. Условие $\forall k = 1, \ldots, N$, $u_k \ge 0$ равносильно условию

$$\sum_{i=1}^{N} z_i \le u.$$

Условие неразорения в моделях долгосрочного страхования жизни $\sum_{i=1}^{N} z_i \le u$ аналогично условию неразорения при краткосрочном страховании жизни $\sum_{i=1}^{N} \xi_i \le u$. Поэтому современную величину будущей выплаты z_i можно считать аналогом индивидуального иска ξ_i и при решении задач долгосрочного страхования использовать методы и приемы решения задач краткосрочного страхования жизни. В частности, если договоры страхования однородны, наименьшее значение капитала u, обеспечивающего заданный уровень неразорения α, может быть найдено с помощью приближения Гаусса

$$u = ES + x_\alpha \sqrt{\operatorname{Var} S},$$

где $ES = \sum_{i=1}^{N} Ez_i$, $\operatorname{Var} S = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{Var} z_i$, $\Phi\left(x_\alpha\right) = \alpha$.

Вопросы

1. Опишите два подхода к расчету нетто-премии при полном страховании жизни.

2. Вычислите нетто-премии для модели де Муавра в соответствии с двумя подходами.

3. Опишите n-летнее страхование жизни.

4. Что такое n-летнее смешанное страхование жизни?

5. Как рассчитать премию для полного страхования, отсроченного на m лет?

6. Напишите неравенство Коши–Буняковского для задачи долгосрочного страхования.

7. Опишите полное страхование жизни с непрерывно увеличивающемся значением страховой выплаты.

8. Какова общая схема для долгосрочного страхования жизни?

9. Как рассчитать вероятность разорения страховой компании при долгосрочном страховании жизни?

10. Как применить приближение Гаусса для однородных договоров страхования?

3. СТОХАСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ. ВВЕДЕНИЕ В СОВРЕМЕННЫЙ СТОХАСТИЧЕСКИЙ ФИНАНСОВЫЙ АНАЛИЗ

Изложение материала, посвященного стохастическим моделям эволюции финансовых инструментов, в современной литературе по финансовой математике часто начинается словами: «Пусть (Ω, F, P, $\mathbf{F}$) − стохастический базис, а S_t − согласованный с фильтрацией $\mathbf{F}$ случайный процесс, описывающий динамику цены рискового актива S». Ниже на примере простой модели объясняется, что стоит за этими словами и понятиями. Излагаемый материал может рассматриваться как введение в современный стохастический анализ.

3.1. Пример случайного процесса, описывающего динамику цены рискового актива

Пример 1. Предположим, что значения изменяющейся случайным образом цены акции становятся известными в дискретные моменты времени $t = 0, 1, ..., T$. В начальный момент $t = 0$ известна начальная цена $S_0 > 0$, а далее при переходе от момента t к $(t + 1)$ изменение цены происходит в соответствии с равенством

$$S_{t+1} = \begin{cases} uS_t \text{ с вероятностью } p > 0, \\ dS_t \text{ либо с вероятностью } q > 0. \end{cases}$$

Случай, соответствующий умножению на коэффициент u, будем называть повышением цены, а умножению на d − понижением. Это действительно так, если $u > 1$, а $0 < d < 1$. Если оговорить, что повышение или понижение цены на очередном шаге происходит независимо от того, какие события осуществляются на других шагах, то придем к описанию случайного процесса ценообразования в рамках данной простейшей модели, который допускает однозначную математическую формализацию.

На рис. 3.1 изображены возможные варианты эволюции цены для $T = 2$, т. е. для двухшаговой модели.

Рисунок иллюстрирует то обстоятельство, что реально может осуществиться одна из четырех траекторий цены S_t, начинающихся в точке S_0 и заканчивающихся в одной из точек S_0u^2, S_0ud или S_0d^2.

Предположение о независимости событий на каждом шаге позволяет определить и вероятности осуществления каждой траектории. Например, траектория (S_0, S_0ud S_0d^2) осуществляется с вероятностью $p\ q$.

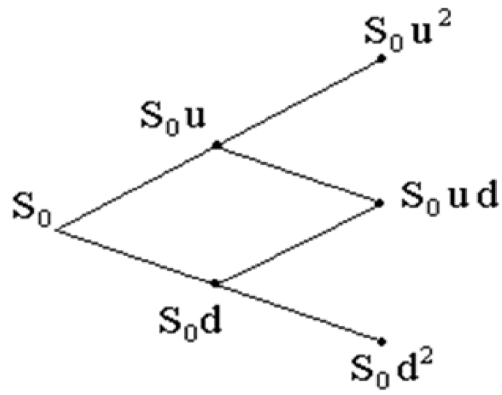

Рис. 3.1. Двухшаговая модель случайного процесса ценообразования

3.2. Стохастический базис

Стохастический базис представляет собой четверку элементов $(\Omega, F, P, \mathbf{F})$.

Множество элементарных событий есть Ω. Это может быть множество произвольной природы, содержательно оно описывает все возможные исходы некоторого опыта, случайного процесса. Под элементарным событием естественно понимать траекторию цены, реализующуюся в ходе процесса. Таких траекторий здесь конечное число 2^T, и, следовательно, множество элементарных событий конечно. В общем случае Ω может быть бесконечным. Если предполагать, что число шагов не ограничено числом T, а рассматривать любые натуральные t, то придем к бесконечному и, более того, несчетному множеству элементарных событий.

Нас будут интересовать в основном лишь конечные Ω (записывается $|\Omega|<\infty$). Ω удобно представить в следующей форме. Обозначим символом «+1» ситуацию повышения цены на соответствующем шаге, а через «–1» − ее понижение. В таком случае любое элементарное событие может быть представлено как конечный набор из T элементов, каждый из них либо +1, либо –1. Все Ω может быть записано как декартово произведение $\Omega = \{-1, +1\}^T$.

Через F обозначена σ-алгебра подмножеств множества – такое семейство множеств, которое содержит пустое множество $\varnothing$, все Ω и замкнуто относительно операций дополнения, счетного пересечения и счетного объединения. Формально F есть σ-алгебра подмножеств Ω при условии:

1) $\varnothing \in F, \Omega \in F$;

2) $A_1 \in F,\ A_2 \in F \Rightarrow A_1 \setminus A_2 \in F$;

3) $A_i \in F \Rightarrow \bigcap_i A_i \in F$ и $\bigcup_i A_i \in F$,

где пересечение и объединение вычисляется по счетному множеству индексов.

Элементы σ-алгебры трактуются как события: ∅ – невозможное событие, Ω − достоверное событие. Для конечного Ω можно рассмотреть σ-алгебру, состоящую из всех подмножеств Ω. Их также будет конечное число 2^N, где $N = 2^T$. При $T = 2$ их 16, из них 4 элементарных события (отдельные траектории), а, скажем, $A = \{(1,1), (1,-1)\}$ − событие состоящее в том, что на первом шаге цена актива поднялась (а что на втором − неизвестно).

Заметим также, что для конечного Ω термин «σ-алгебра» можно заменить словом «алгебра», поскольку σ указывает на свойства, связанные со счетным числом элементов, а для конечного Ω различных элементов F − лишь конечное число. Пара (Ω, F) называется *измеримым пространством.*

P − вероятностная мера (или вероятность). Определенная на F. Функция множества $P = P(A)$ удовлетворяет условиям:

1) $P(\Omega) = 1,\ P(A) > 0$ для всех $A \in F;$

2) $P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i),$ если только $A_j \cap A_i = \varnothing$,

– для любой пары индексов j, k из рассматриваемого счетного (или конечного) множества индексов $Г$.

Смысл вполне очевиден: $P(A)$ есть вероятность события А.

Тройка (Ω, F, P) называется *вероятностным пространством.* Или оно называется *конечным,* если множество Ω конечно. При конечном Ω мы будем предполагать, что все элементарные события $\omega \in \Omega$ являются элементами F, т. е. $\{\omega\} \in F$. В этом случае естественно считать, что $P(\{\omega\}) > 0$ для всех $\omega \in \Omega$. В противном случае элементарные события, имеющие нулевую вероятность, можно было бы исключить из рассмотрения. При этом получается, что только невозможное событие ∅ имеет нулевую вероятность. Следовательно, слова «почти, наверное», т. е. что с вероятностью 1, характерные для многих теоретико-вероятностных формулировок, можно опускать, т. к. если некоторое свойство выполнено почти наверное, то оно справедливо для всех $\omega \in \Omega$. Вероятность элементарного события ω определяется соотношением $P(\omega\{\}) = p^k q^{T-k}$, где K – число повышений цены, а $T–K$ – число понижений.

Для формализации случайного процесса ключевым является последний элемент стохастического базиса **F** – фильтрация, т. е. неубывающее семейство σ-подалгебр множества F, $\mathbf{F} = (F)_{t\in\mathbf{T}}$. Индекс t, интерпретируемый как время, в конечной дискретной модели принимает значения 0, 1, ..., Т. Таким образом, $\mathbf{F} = (F_0, F_1, ..., F_t)$, где F_t – σ-алгебра, $F_t \subset F_{t+1}$ для $t = 0, 1, ..., T–1$; $F_T \subset F$.

В непрерывных моделях может быть $\mathrm{T} = [0, +\infty)$ или $\mathrm{T} = [0,\mathrm{T}]$.

Фильтрация задает на вероятностном пространстве информационно-эволюционную структуру F_t – это множество событий, которые могут осуществиться к моменту t, информацией о которых мы можем располагать к данному моменту.

Так, снова возвращаясь к примеру 1, видим, что содержательная постановка задачи не предполагает точного знания в момент $t = 0$ того, по какой траектории будет меняться цена актива. Следовательно, при $t = 0$ нам известно лишь, что возможна любая траектория из множества Ω. Такой информационной ситуации соответствует σ-алгебра $F_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, называемая тривиальной.

При $t = 1$ наблюдаем одну из двух ситуаций: цена актива либо поднялась (+1), либо опустилась (–1), а что будет дальше – снова неизвестно, σ-алгебру F_1 составим уже из четырех элементов $\{\varnothing, \Omega, (-1, \Omega_{T-1}), (+1, \Omega_{T-1})\}$, где символом $(-1, \Omega_{T-1})$ обозначено множество всех Т-мерных векторов с координатами +1 и –1, у которых первая координата –1. Аналогичный этому смысл имеет символ $(+1, \Omega_{T-1})$. Таким образом, за первый шаг возможно два варианта развития процесса, что и отражает σ-алгебра F_1. На втором шаге добавляется еще два варианта: $(-1, -1, \Omega_{T-2})$, $(-1, +1, \Omega_{T-2})$, $(+1, -1, \Omega_{T-2})$, $(+1, +1, \Omega_{T-2})$ и F_2 состоит уже из этих элементов, их возможных объединений и пересечений, включая пустое множество и все Ω. Для $\mathrm{T} = 2$ F_2 просто совпадает с множеством всех подмножеств траекторий из Ω.

В общем случае F_t строится с помощью операций объединения и пересечения из множеств вида (ω_t, Ω_{T-t}), где ω_t – t-мерный вектор, составленный из чисел +1 и –1, отвечающий конкретной траектории до момента t, а Ω_{T-t} − множество всех возможных ее продолжений, $\Omega_{T-t} = \{-1, +1\}^{T-t}$. Данная фильтрация отражает следующие свойства: 1) на каждом шаге возможно два варианта развития процесса, обозначенных соответственно –1 и +1; 2) в момент t могут быть известны лишь прошлые относительно этого момента события (вектор ω_t), в будущем возможно любое продолжение (множество Ω_{T-t}).

Первое свойство отражает эволюционную структуру стохастического базиса, а второе − его информационную составляющую.

В заключение данного пункта отметим, что стохастический базис называется конечным, если $|\Omega| < +\infty$ и T= {0, 1, …, T}.

3.3. Структура конечных σ-алгебр

Поскольку в дальнейших построениях мы будем рассматривать в основном случайные процессы, построенные на конечном стохастическом базисе, остановимся подробнее на структуре конечных σ-алгебр.

Пусть (Ω, F) − измеримое пространство, т. е. множество элементарных событий, и некоторая σ-алгебра его подмножеств (событий). Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1.1. Предположим, что непустые множества $F_1, F_2, \ldots, F_n \in F$ образуют разбиение Ω, то есть $F_i \cap F_j = 0$ при $i \neq j$ и $\bigcup_{i=1}^{n} F_i = \Omega$. Тогда система множеств $\hat{F} = \{B\}$, каждое из которых либо пусто, либо может быть представлено в форме

$$B = F_{i1} \cup F_{i2} \cup \ldots \cup F_{ik}, \tag{3.1}$$

где $i1, i2, \ldots, ik \in \{1, \ldots, n\}$ есть конечная σ-подалгебра F.

В этом случае говорят, что *σ-алгебра F порождается системой множеств $F_1, \ldots, F_n$.*

Доказательство леммы следует непосредственно из определения σ-подалгебры и построения F.

Лемма 1.2. Пусть F − конечная σ-подалгебра F. В таком случае найдется конечное разбиение $F_1, F_2, \ldots, F_n \in F$ множества Ω, состоящее из непустых элементов F, каждый из которых не содержит других элементов F, кроме пустого множества и самого себя, порождающее σ-подалгебру F.

Данные элементы F_1, F_2, ..., F_n называются *атомами σ-подалгебры F* и определяются по ней однозначно.

Доказательство. Пусть $\hat{F}$ − конечная σ-подалгебра F. Будем говорить, что множество $F \in \hat{F}$ обладает свойством атома, если $F \neq \varnothing$ и не содержит других элементов $\hat{F}$, кроме пустого множества и самого себя. В силу конечности семейство $\hat{F}$ содержит конечное число различных непустых элементов B_1, …, $B_к$. Покажем прежде всего, что каждое множество $B = B_j \in \hat{F}$ либо само обладает свойством атома, либо содержит множество с таким свойством. Действительно, если B_j содержит отличный от себя элемент $B_{j1} \in \hat{F}$, то B_{j1} либо обладает свойством атома, либо содержит $Bj_2 \neq B_{j1}Bj_2$, $Bj_2 \in \hat{F}$. Поскольку в $\hat{F}$ конечное число множеств, постольку за конечное число шагов получим множество B_{jk} **С** B_j, не содержащее других элементов $\hat{F}$, кроме самого себя и пустого множества.

Выберем теперь среди элементов $\hat{F}$ все множества F_1, …, F_n, обладающие свойством атома. Покажем, что это и есть искомая система атомов, порождающая σ-алгебру $\hat{F}$. Рассмотрим произвольное множество $B \in \hat{F}$. При совпадении B с одним F_i выражение для B будет (3.1). При несовпадении найдется $F_{i_1} \subset B, F_{i_1} \neq B$, но $B \setminus F_{i_1} \in \hat{F}$, следовательно, либо $B \setminus F_{i_1} = F_{i_2}$, либо $B \setminus F_{i_1} \supset F_{i_2}$, $B \setminus F_{i_1} \neq F_{i_2}$ для некоторого i_2. Далее получим за конечное число шагов множество $B \setminus (F_{i_1} \cup ... \cup F_{i_k})$, не содержащее элементов системы $\{Fi\}$. Однако такое множество не может быть непустым, т. к. является элементом $\hat{F}$, и в этом случае должно содержать множество со свойством атома. Поэтому $B \setminus (F_{i_1} \cup ... \cup F_{i_k}) = \varnothing$ и справедливо представление (3.1). Лемма доказана.

Для примера 1 атомами σ-алгебры F_t при $t \geq 1$ являются множества (ω_t, Ω_{T-t}). Каждое из этих множеств для фиксированного t соответствует «максимальной» доступной в момент времени t информации о прошлой и будущей эволюции цены S_t.

3.4. Случайные процессы

Для заданного стохастического (Ω, F, P, **F**) базиса *случайным процессом* называется функция двух переменных $\xi_t(\omega), \omega \in \Omega, t \in \mathbf{T}$.

Значения функции $\xi_t(\omega)$ могут быть элементами произвольного измеримого пространства (E,ε). Для наших целей достаточно ограничиться числовыми скалярными функциями, т. е. положить $E = \mathbf{R^1}$. Что касается σ-алгебры *E*, здесь ее обычно предполагают совпадающей с σ-алгеброй борелевских множеств числовой прямой*, однако явно это обстоятельство в дальнейшем использоваться не будет.

Случайный процесс называется согласованным с фильтрацией **F**, если функция $\xi_t(\omega)$ как функция ω измерима относительно σ-алгебры F_t при всех $t \in \mathbf{T}$.

Свойство измеримости функции $\xi = \xi_t(\omega) : \Omega \to \mathbf{R}^1$ относительно σ-алгебры $\hat{F}$ подмножеств множества Ω может быть определено условием: для каждого промежутка $[a,b) \subset \mathbf{R}^1$ множество $\xi^{-1}([a,b)) = \{\omega \in \Omega : a \le \xi(\omega) < b\}$ является элементом $\hat{F}$.

Отметим, что при фиксированном *t* функция $\xi = \xi_t(\omega)$ есть не что иное, как *случайная величина*, определенная на вероятностном пространстве (Ω, F_t, P). При фиксированном $\omega \in \Omega$ получаем функцию параметра *t*, называемую *траекторией* процесса.

Далее основное внимание будет уделяться случайным процесссам, определенным на стохастическом базисе, принимающим, следовательно, конечное множество значений. В этом случае определение измеримости эквивалентно следующему свойству:

$$\xi^{-1}(a) = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = a\} \in \hat{F} \text{ для любого } a \in \mathbf{R}^1.$$

Более того, имея в виду свойства конечных σ-алгебр, обсуждавшиеся в разделе 3.1, отметим следующий факт.

Лемма 1.3. Функция $\xi = \xi_t(\omega) : \Omega \to \mathbf{R}^1$ измерима относительно конечной σ-алгебры *F* подмножеств Ω тогда и только тогда, когда она постоянна на атомах *F*.

Доказательство леммы оставляем читателю в качестве упражнения.

Для иллюстрации понятия согласованности процесса с фильтрацией обратимся снова к примеру 1.

Рассмотрим сначала случай *T* = 2. Множество Ω здесь состоит из четырех элементов: $\omega^{(1)} = (+1;+1)$, $\omega^{(2)} = (+1;-1)$, $\omega^{(3)} = (-1;+1)$,

* Борелевским называется множество, которое может быть получено в результате не более чем счетной совокупности операций объединения и пересечения открытых и замкнутых множеств.

$\omega^{(4)}=(-1;-1)$. Функция $S_t(\omega)$, определяющая значения случайного процесса, задана следующими соотношениями:

$S_0(\omega^{(i)})=S_0$ для i=1, 2, 3, 4;

$S_1(\omega^{(i)})=uS_0$ для $i=1,\ 2$;

$S_1(\omega^{(i)})=dS_0$ для $i=3,\ 4$;

$S_2(\omega^{(1)})=u^2S_0,\ S_2(\omega^{(2)})=S_2(\omega^{(3)})=udS_0,\ S_2(\omega^{(4)})=d^2S_0.$

Случайный процесс $S_t(\omega)$ согласован с фильтрацией. Для t = 0 множество $\{\omega\in\Omega:S_0(\omega)=a\}$ либо пусто (при $a\neq S_0$), либо совпадает со всем Ω (при $a=S_0$). Для t = 1 аналогичное множество $\{\omega\in\Omega:S_1(\omega)=a\}$ равно одному из трех множеств: $\{\omega^{(1)},\omega^{(2)}\}$ (при $a=uS_0$), $\{\omega^{(3)},\ \omega^{(4)}\}$ (при $a=dS_0$), $\varnothing$ во всех остальных случаях. Наконец, при t = 2 для соответствующих прообразов имеем четыре варианта: $\{\omega^{(1)}\}$ (при $a=u^2S_0$), $\{\omega^{(2)},\ \omega^{(3)}\}$ (при $a=udS_0$), $\{\omega^{(4)}\}$ (при $a=d^2S_0$) и $\varnothing$ во всех остальных случаях.

Аналогичные результаты получим и для произвольного T. При $0\ \leq\ t\leq\ T$ множество $\{\omega\in\Omega:S_t(\omega)=a\}$ не пусто в случае $a=u^kd^{T-k}S_0$, κ = 0, 1, …, t, и имеет вид $\bigcup\limits_{\omega_t}(\omega_t,\Omega_{T-t})$, где объединение берется по всем тем t-мерным векторам ω_t, у которых k компоненты равны +1, а $t\ -\ k\ =\ -1$.

Из свойства измеримости следует, в частности, что, получив в момент t значение цены актива S_t, можно построить множество всех траекторий процесса, приводящих к заданному значению цены (векторы ω_t), и ничего нельзя сказать о ее будущей эволюции, кроме заранее оговоренных возможностей (множество Ω_{T-t}).

Заметим, что можно построить сколько угодно различных случайных процессов, определенных на заданном стохастическом базисе и согласованных с его фильтрацией. Например, рассматривая случайный процесс $S_t(\omega)$ примера 1, можно определить семейство таких случайных процессов $\xi=\xi_t(\omega)$, потребовав лишь, чтобы равенство $\xi_t(\omega')=\xi_t(\omega'')$ выполнялось тогда и только тогда, когда $S_t(\omega')=S_t(\omega'')\ (t\in T;\ \omega',\omega''\in\Omega)$. Все указанные процессы будут обладать точно такими же свойствами информативности что и процесс $S_t(\omega)$. Можно указать процессы, обладающие более высокой или более низкой информативностью. В частности, если функцию $\xi=\xi_t(\omega)$ определить так, чтобы она принимала различные значения на каждом атоме F_t, то получим «максимально информативный» процесс: по значению в момент t для него однозначно восстанавливается вектор ω_t. Наименее информативным в указанном смысле (но тоже согласованным с фильтрацией) будет процесс $\xi_t(\omega)$ = const.

Замечание. Свойство информативности достаточно условно и зависит от фильтрации стохастического базиса. Так, процесс $S_t(\omega)$ из примера 1 не является максимально информативным, поскольку, например, $\{\omega \in \Omega : S_2(\omega) = udS_0\}$ = $(+1,-1,\Omega_{T-t}) \bigcup (-1,+1,\Omega_{T-t})$, т. е. данное множество объединяет два атома. Можно, однако, на том же вероятностном пространстве построить другую фильтрацию **F'** = $= (F'_t)_{t\in T}$, относительно которой информативность во введенном выше смысле будет иметь место. Для этого достаточно положить $F_t' = \sigma(\xi_t)$, где символ в правой части равенства означает минимальную σ-подалгебру F, относительно которой измерима функция $\xi_t(\omega)$.

3.5. Предсказуемые случайные процессы

Дискретный случайный процесс $\xi_t(\omega)$, определенный на стохастическом базисе (Ω, F, P, **F**), называется предсказуемым, если функция $\xi_t(\omega)$ измерима относительно σ-алгебры F_{t-1} для каждого $t = 1,\ 2,\ \ldots$, и $\xi_0(\omega)$ измерима относительно F_0.

Смысл определения состоит в том, что значения процесса для момента t определяются событиями, отвечающими предыдущему моменту (t – 1). Предсказуемые процессы используются, в частности, при формализации процедур управления, когда управляющее воздействие, назначаемое в момент $(t\ -\ 1)$, существует на промежутке $[t-1;t)$ и результат наблюдается в момент t.

Проиллюстрируем введенное определение. Пусть в условиях примера 1 инвестор принял правило управления активом S, определяющее количество единиц актива γ_t, которое он должен иметь в момент времени t в зависимости от эволюции цены актива до этого момента. Например, инвестор решает приобрести определенное количество единиц актива γ_0 к моменту $t = 0$, а далее увеличивать это количество на единицу, если на предыдущем шаге произошло увеличение цены, и, напротив, уменьшать на единицу, если цена понизилась. В таком случае процесс управления активом можно представить следующим образом.

При $t = 0$ имеем $\gamma_t = \gamma_0$ по условию. На первом шаге управления, поскольку сформулированное выше правило еще не может быть реализовано, γ_1 также считаем заданным: $\gamma_t = \gamma_0$. Таким образом, определяем величины $\gamma_0(\omega)$ и $\gamma_1(\omega)$ в терминах случайных процессов как функции, измеримые относительно σ-алгебры $\{\varnothing, \Omega\}$ = F_0. Значение $\gamma_2(\omega)$ уже зависит от изменения цены на первом шаге. Для векторов $\omega \in \Omega$, имеющих первую координату +1, следует положить $\gamma_2 = \gamma_1 + 1$, а при первой координате, равной –1, $\gamma_2 = \gamma_1 - 1$. В терминах σ-алгебры F_1 $\gamma_2(\omega)$ постоянна на атомах $(+1, \Omega_{T-t})$ и $(-1, \Omega_{T-t})$. Аналогичным образом могут быть определены значения функции $\xi_t(\omega)$ при всех t = 3, 4, …, Т−1. Значения $\xi_t(\omega)$ определяются рекуррентной формулой $\xi_t(\omega) = \xi_{t-1}(\omega) \pm 1$, где знак плюс выбирается для тех ω, у которых компонента с номером t–1 равна +1, а минус − в противном случае. Данная функция может быть записана в явном виде: $\xi_t(\omega) = \gamma_1 + k - m$, где k − количество компонент, равных +1, а m − соответственно –1 у вектора ω_{t-1}, определяющего атом $(\omega_{t-1}, \Omega_{T-t+1})$, которому принадлежит элемент ω.

Описанный случайный процесс является предсказуемым. Измеримость функции $\gamma_t(\omega)$ относительно F_{t-1} следует, например, из постоянства данной функции на атомах σ-алгебры.

3.6. (B,S)-Рынок. Стратегии управления капиталом

Будем рассматривать финансовый рынок с двумя активами. Первый актив B предполагается безрисковым и может рассматриваться как модель облигации или банковского счета. Динамика актива описывается соотношениями:

$$B_t = B_{t-1}(1 + r), \quad t = 1, 2, \ldots, T, \qquad (3.1)$$
$$B_0 = 1$$

Выражение (3.1) соответствует начислению средств по процентной ставке r, рассчитанной на единичный период по формуле сложных процентов. Легко видеть, что $B_t = (1 + r)^t$. Величина $\frac{1}{B_t} = (1+r)^{-t}$ называется *коэффициентом дисконтирования* для соответствующего периода $[0; t]$.

Второй актив S предполагается рисковым и его динамика описывается случайным процессом $S = S_t(\omega)$, определенным для данного стохастического базиса (Ω, F, P, $\mathbf{F}$). Стохастический базис будем предполагать конечным с условиями $\{\omega\} \in F, P(\{\omega\}) > 0$ для любого $\omega \in \Omega$, процесс $S = S_t(\omega) -$ согласованным с фильтрацией F.

Стратегией (стратегией управления) назовем пару $U = \{\beta_t, \gamma_t\}$, где β_t и γ_t − предсказуемые случайные процессы. Предсказуемость понимается в смысле первого абзаца п. 3.5 относительно того же базиса (Ω, F, P, $\mathbf{F}$).

Капиталом, или стоимостью портфеля в момент t, отвечающим выбранной стратегии U, будем называть величину

$$V_t(U) = \beta_t B_t + \gamma_t S_t. \qquad (3.2)$$

Таким образом, β_t и γ_t могут интерпретироваться как количество единиц соответственно безрискового и рискового актива. Заметим сразу, что мы не будем накладывать ограничения на знаки величин β_t и γ_t, интерпретируя отрицательные β_t как взятие взаймы суммы $|\beta_t|$ (под проценты, определяемые ставкой r_0, а отрицательные γ_t как короткую позицию по рисковому активу. Значения β_t и γ_t могут быть и не обязательно целыми, мы будем рассматривать случай бесконечно делимых активов, допуская какие угодно дробные количества β_t и γ_t.

Заметим, что в данной постановке стратегия U определяет в т. ч. начальный капитал $V_0(U)$. Величина $V_0(U)$ может быть случайной, если σ-алгебра F_0 не является тривиальной, состоящей из двух множеств $\{\varnothing, \Omega\} = F_0$, и детерминированной, если $F_0 = \{\varnothing, \Omega\}$.

Соотношение (3.2), рассматриваемое для t = 0, 1, …, T, определяет *случайный процесс* эволюции капитала, согласованный с фильтрацией стохастического базиса. Предположение о предсказуемости процессов β_t и γ_t позволяет дать следующую интерпретацию процедуры управления портфелем на (B, S)-рынке.

Значения β_0, γ_0, отвечающие t = 0, определяют начальное значение капитала, которым располагает инвестор до начала собственно процесса управления. По известной начальной информации, определяемой σ-алгеброй F_0 и значениями $S_0(\omega)$, стратегия определяет количество единиц активов β_1 и γ_1 на промежутке (0;1]. Начиная с момента t = 0 и заканчивая моментом t = 1, инвестор располагает портфелем стоимостью $\beta_1 B_0 + \gamma_1 S_0$. В момент $t = 1$ происходит изменение цены рискового актива («объявление новых котировок») S_1 и начисление процентов на безрисковый актив, т. е. B_0 превращается в $B_1 = B_0(1 + r)$. Таким образом, стоимость портфеля инвестора становится равной величине $V_1(U) = \beta_1 B_1 + \gamma_1 S_1$. Далее стратегия назначает новое количество β_2, γ_1 на промежуток (1;2], и процесс повторяется. В произвольный момент $t \in \{1, \dots, T\}$ после объявления значений S_t инвестор имеет портфель, стоимость которого определяется формулой (3.1), где β_t и γ_t выбраны в предыдущий момент t–1.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Альгин, А. П. Риск и его роль в общественной жизни / А. П. Альгин. М. : Мысль, 1989. С. 168.
2. Балабанов, И. Т. Риск – менеджмент / И. Т. Балабанов. М. : Финансы и статистика, 1996.С. 205.
3. Лапуста, М. Г. Риски в предпринимательской деятельности / М. Г. Лапуста, Л. Г. Шаршукова. М. : ИНФРА-М, 1998. С. 215.
4. Риски в современном бизнесе / П. Г. Грабовый [и др.]. М. : Алане, 1994. С. 175.
5. Чалый-Прилуцкий, В. А. Рынок и риск : методические материалы: (пособие для бизнесменов) по анализу оценки и управления риском / В. А. Чалый-Прилуцкий. М. : НИУР : Центр СИНТЕК, 1994. С. 152.
6. Arrow, K. J. Aspects of the theory of risk-bearing / K. J. Arrow. Helsinki : Yrjo Jahnssonin Saatio, 1965. P. 243.
7. Granville, J. E. New strategy of daily stock market for maximum profit / J. E. Granville. N. Y. : Prentice-Hall, 1976. P. 207.
8. Therapeutic risk: Perception, measurement, management / ed. D. Burley, W. H. W. Inman. Chichester : Wiley, 1988. P. 173.
9. Covello, V. T. Risk communication: Research and practice / V. T. Covello, D. von Winterfeldt, P. Slovic. N. Y. : Columbia Univ., School of Public Health, 1988. P. 200.
10. Lewis, H. W. Technological risk / H. W. Lewis. N. Y. : Norton, 1990. P. 197.
11. Linnerooth, J. The evaluation of life saving: A survey / J. Linnerooth. Laxenburg : IIASA, 1975. (Res. Report; 75-21). С. 118–126.
12. Гранатуров, В. М. Экономический риск: сущность, методы измерения, пути снижения / В. М. Гранатуров. М. : Дело и Сервис, 1999. С. 217.
13. Тренев, Н. Н. Управление финансами / Н. Н. Тренев. М. : Финансы и статистика, 2000. С. 163.
14. Transboundary risk management / ed. J. Linnerooth-Bayer, R. E. Lofstedt, Sjostedt. Laxenburg : IIASA, 2001. P. 42–53.
15. Bacskai, T. A gazdasigi kockasat es meresemeh medszerei / T. Bacskai. Budapest : Kozgazdasagi es Jogi Konyvkia-do, 1976. P. 202.
17. Шарп, У. Инвестиции / У. Шарп, Г. Дж. Александер, Дж. В. Вэйли. М. : ИНФРА-М, 1997. С. 138.
18. Sharp, W. E. Capital Asset price : a theory of market equilibrium under

conditions of risk / W. E. Sharp // J. Finance. 1964. 29. P. 425–442.
19. Lintner, J. The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets / J. Lintner // Rev. Economy & Statistics. 1965. P. 13–27.
20. Mossin, J. Equilibrium in a capital asset market / J. Mossin // Econometrica. 1966. 34. P. 768–783.
21. Roll, R. A critique of asset pricing theory test / R. Roll // J. Financ. Econom. 1977. P. 35–42.
22. Ross, S. A. The arbitrage theory of capital asset pricing / S. A. Ross // J. Economic Theory. 1976. P. 76–83.
23. Roll, R. A critical reexamination of the empirical evidence of the arbitrage pricing theory / R. Roll, S. A. Ross // J. Finance. 1984. P. 23–37.
24. Markowitz, H. Portfolio selection / H. Markowitz // J. Finance. 1952. Vol. 7. P. 77–91.
25. Tobin, J. Liquidity preference as behavior towards risk / J. Tobin // Rev. Economic Stud. 1958. P. 135–142.
26. Merton, R. C. Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous time case / R. C. Merton // Rev. Econ. Stat. 51, 1969. P. 17–38.
27. Awerbuch, S. Portfolio-based Electricity Generation Planning: Policy Implications for Renewables and Energy Security / S. Awerbuch // Mitigation and Adaptation Strategies for Global Change, 2006. 11. P. 693–710.
28. Повышение эффективности системы сбыта продукции: математическое моделирование / Никонов О. И., Медведева М. А., Египцев Д. С. // Вестник УГТУ-УПИ. 2004. № 4. С. 96–103.
29. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Факты. Модели. М. : ФАЗИС, 1998. 512 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Аникин Сергей Алексеевич,
Никонов Олег Игоревич,
Медведева Марина Александровна

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Редактор *И. В. Меркурьева*
Компьютерная верстка *Т. С. Криницыной*

Подписано в печать 30.11.2013. Формат 60×90 1/16.
Бумага типографская. Плоская печать. Гарнитура Times New Roman.
Усл. печ. л. 4,5. Уч.-изд. л. 3,3. Тираж 100 экз. Заказ № 90.

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
Тел.: 8(343)375-48-25, 375-46-85, 374-19-41
E-mail: rio@ustu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620000, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: 8(343)350-56-64, 350-90-13
Факс: 8(343)358-93-06
E-mail: press-urfu@mail.ru